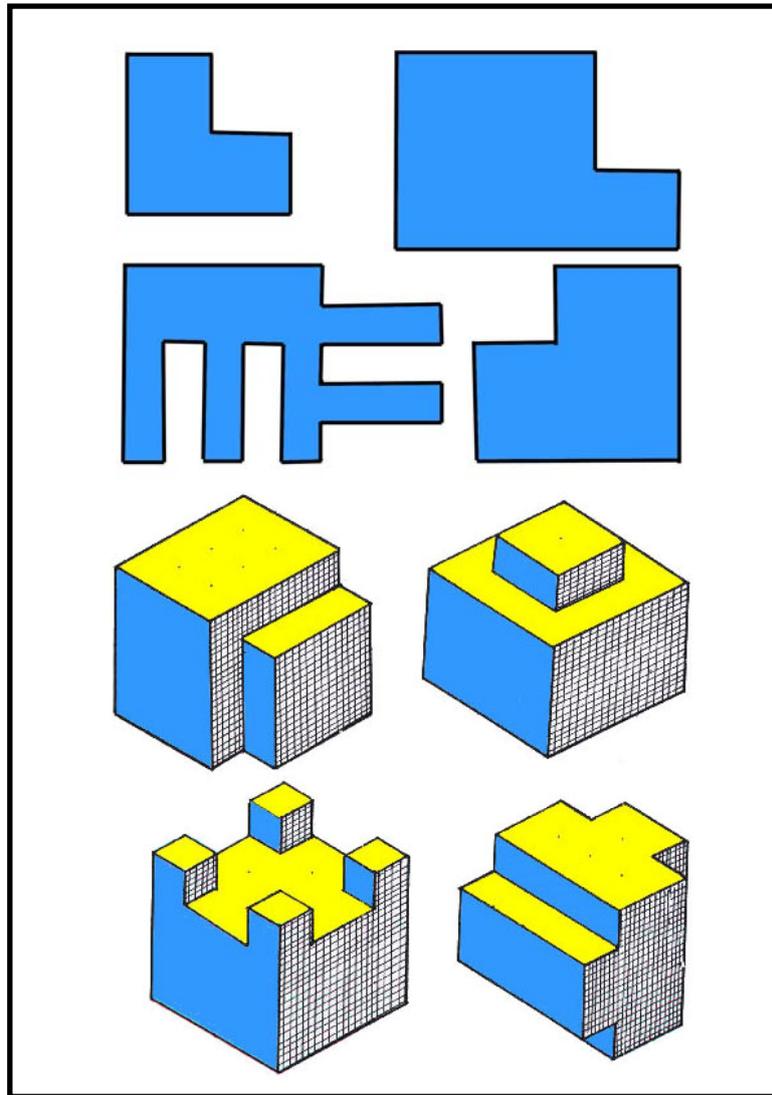


JESÚS CÁMARA OLALLA



Geometría y álgebra
FÓRMULAS NOTABLES
LOS CUADRADOS
LOS CUBOS

PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Justificación de la propuesta

Muchos autores, respaldados por consideraciones fisiológicas, defienden que cada uno de los hemisferios cerebrales representa procesos mentales diferentes; el izquierdo sería el soporte del pensamiento abstracto, analítico y lógico; al hemisferio derecho correspondería el pensamiento concreto, global e intuitivo que corresponde a procesos espaciales. Con la geometría estaríamos trabajando el pensamiento concreto, la visión espacial y la intuición (hemisferio derecho); llegaríamos a través de él a la generalización, la abstracción.

Hacemos nuestras las palabras de Dreyfus-Eisenberg (1986). **Debe desarrollarse en cada tema los aspectos analíticos y visuales para que cada estudiante se enfrente al material que esté más próxima a su orientación cognitiva.**

A los estudiantes se les puede clasificar en tres grupos, según cómo se enfrentan a la resolución de problemas:

- **Visual o geométrico.** Están dotados de una habilidad especial para interpretar visualmente relaciones matemáticas abstractas.
- **Analítico o no visual.** No tienen necesidad de recurrir a ningún soporte para trabajar con esquemas abstractos.
- **Armónico o intermedio.** Se da un equilibrio entre las aproximaciones visuales y analíticas.

Según una experiencia de V. Meavilla Seguí con alumnos de BUP de Teruel, el 50 % de los alumnos de 1º de BUP y el 55 % de los de 2º de BUP tienden a utilizar el razonamiento visual en la resolución de problemas.

Los Programas de Enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de los alumnos. Para llegar mejor a todos los alumnos deben desarrollarse en cada tema aspectos analíticos y visuales para que cada estudiante se enfrente al material de la manera que esté más próxima a su orientación cognitiva.

La **geometría** es un recurso de esta unidad didáctica para:

- Pasar del lenguaje matemático geométrico al algebraico
- Pasar del lenguaje algebraico al geométrico
- Para demostraciones
- Para verificar algunos errores cometido por los alumnos

Metodología

La **unidad didáctica** está diseñada para que el propio alumno llegue a la formalización del conocimiento matemático a través de actividades en un **aprendizaje por descubrimiento dirigido**. Como puede generar errores se recurre a las **puestas en común** para "reconducir" errores. Al alumno se le obliga a razonar, a construir su propio conocimiento. Se sale de la tradicional clase de matemáticas en la que el

Profesor imparte el conocimiento formal y él lo recibe, para hacer después unos cuantos ejercicios de aplicación.

Dice **Novak**: "*El conocimiento adquirido de memoria pronto se pierde, pronto se olvida y no puede ser utilizado de manera efectiva para resolver problemas.*"

Tipos de actividades diseñadas en la unidad didáctica

- De adiestramiento en la expresión algebraica de superficies
- De representación geométrica de expresiones algebraicas mediante superficie
- De demostración mediante un aprendizaje por descubrimiento dirigido del cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, el producto de la suma de dos números por su diferencia y el cuadrado de un polinomio.
- De ejercicios de aplicación de las fórmulas notables.
- De confrontación entre los cuadrados de los binomios y la suma o diferencia de cuadrados.

Entendemos que desarrollar todo el temario de matemáticas con este método, quizás, implicaría no completar todo el temario del curso; pero sería adecuado, al menos, trabajar varios temas con este método.

**ACTIVIDADES Y MATERIALES
DE TRABAJO
LOS CUADRADOS**

Objetivos didácticos de los cuadrados

- Expresar en lenguaje algebraico la superficie de figuras geométricas en función de ciertas longitudes.
- Representar geoméricamente una expresión algebraica.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el cuadrado de la suma de dos números.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el cuadrado de la diferencia de dos números.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el producto de la suma de dos números cualesquiera por la diferencia de los mismos.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el cuadrado de un polinomio.
- Confrontar geoméricamente la no igualdad de ciertas expresiones.
 - $a^2 + b^2$ y $(a + b)^2$
 - $a^2 - b^2$ y $(a - b)^2$
 - $a^2 + b^2 + c^2$ y $(a + b + c)^2$
- Expresar matemáticamente lo que se indica en ciertas expresiones verbales.

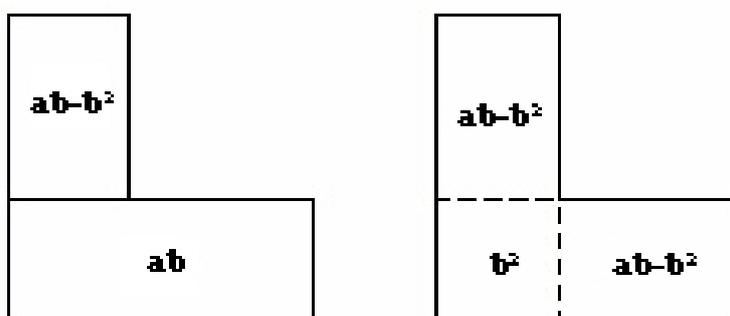
Conocimientos previos

Para el desarrollo de la unidad didáctica será necesario que los alumnos conozcan:

1. Conocimiento del cálculo de la superficie de los cuadriláteros
2. Operaciones básicas algebraicas
3. Cierta conocimiento básico lineal del dibujo

Algunos comentarios a las actividades

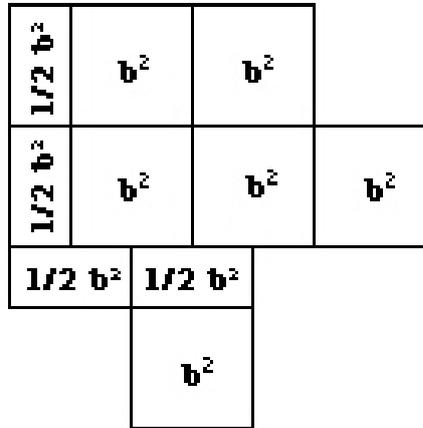
Las actividades donde se expresan algebraicamente las superficies de formas geométricas presentan la ventaja de que se puede llegar a la misma solución haciendo la descomposición de la figura de diversas formas. Es enriquecedora la aportación de las diversas descomposiciones. Véase como ejemplo la figura **F** del ejercicio **2**. La descomposición puede hacerse así:



La superficie de la primera figura sería la suma de los dos rectángulos con superficies $ab - b^2$ y ab . La segunda figura se considera como la suma de los dos rectángulos iguales de su-

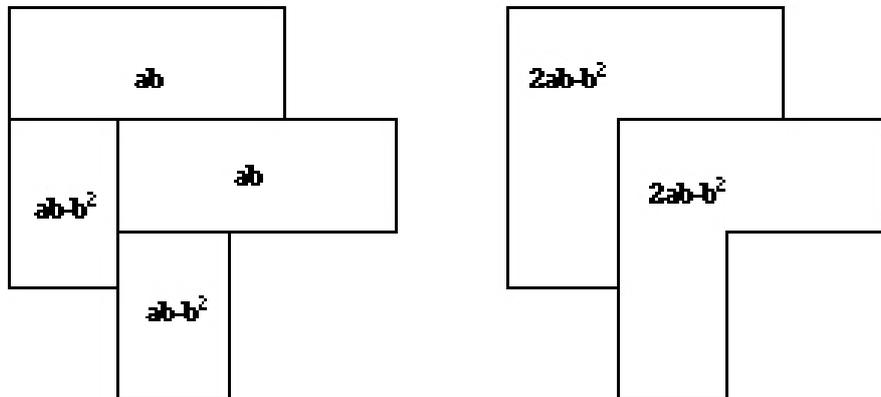
perficie $ab-b^2$ cada uno más un cuadrado de superficie b^2 . Ambas figura tienen la misma superficie: $2ab-b^2$

En la expresión algebraica de superficies, en un momento dado, debe imponerse alguna cláusula restrictiva en la descomposición de figura: no pueden hacerse descomposiciones de superficie $1/2 b^2$. De no ser así algunos alumnos basarían todas las descomposiciones en cuadrados de superficie b^2 ó $1/2 b^2$. Póngase como ejemplo la figura P del ejercicio 6:



Su superficie sería $8b^2$.

Con la cláusula impuesta las descomposiciones podrían ser éstas:



Se llegaría a la expresión $4ab-2 b^2$.

Si no se pusiera la restricción se tendría que aceptar la igualdad:

$$8b^2 = 4ab - 2b^2$$

Esta igualdad sólo es cierta cuando $a = 5/2$ de b .

1. Calcula el valor de:

$$(5 + 3)^2 =$$

$$(8 - 4)^2 =$$

$$5^2 + 3^2 =$$

$$8^2 - 4^2 =$$

$$(7 + 5)(9 - 2) =$$

2. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades.

$$(7 + 2)^2 = 7^2 + 2^2$$

$$9^2 - 5^2 = (9 - 5)^2$$

3. Escribe matemáticamente:

- a) la suma de cinco al cuadrado y de doce al cuadrado
- b) el cuadrado de la suma de seis y siete
- c) la diferencia de los cuadrados de treinta y dieciséis
- d) el cuadrado de la diferencia entre sesenta y cuarenta y siete
- e) el cuadrado del triple de ciento ocho

4. Calcula la superficie de las figuras que se encuentran entre trazos gruesos o coloreadas en función de las longitudes a y b que tienes en la parte superior del dibujo.

Da la respuesta de forma algebraica. Para medir y comparar los lados es muy útil el compás.

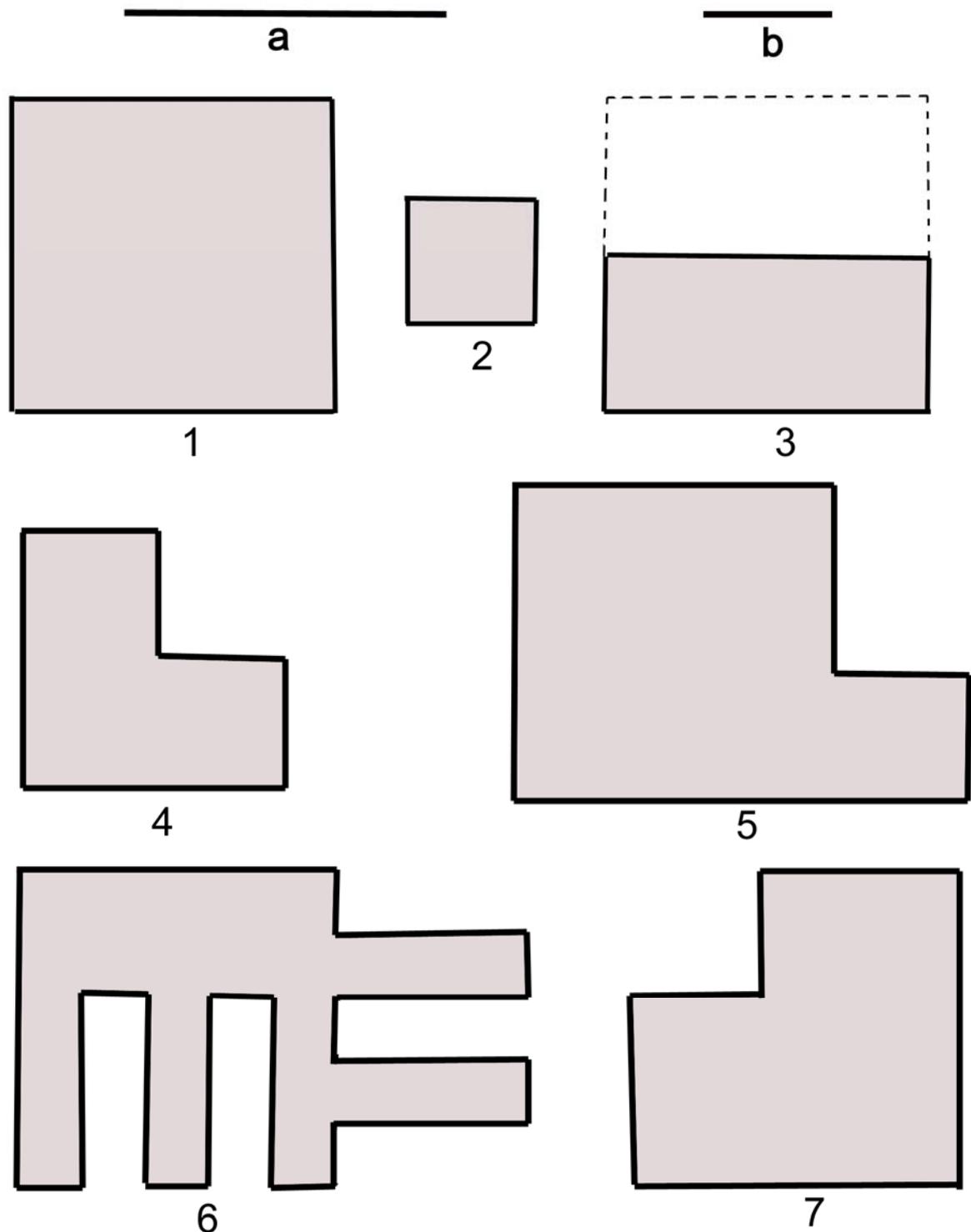
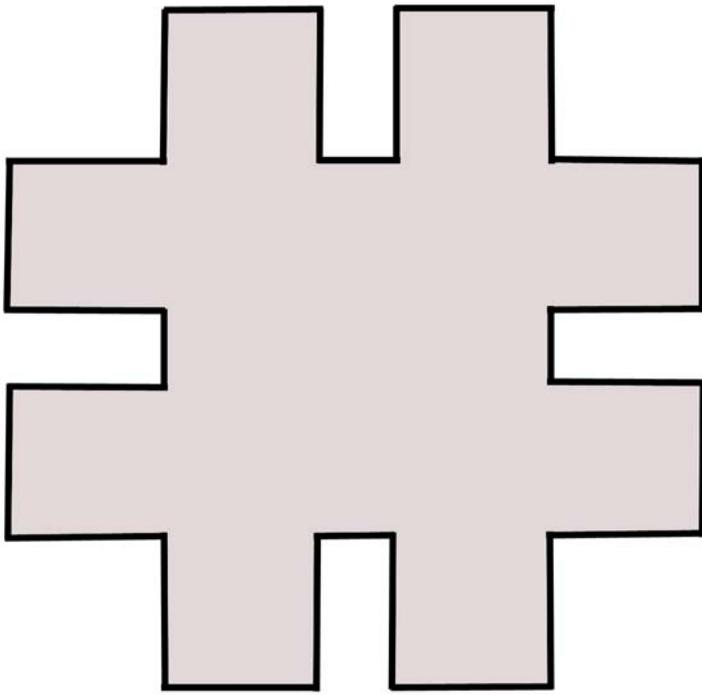
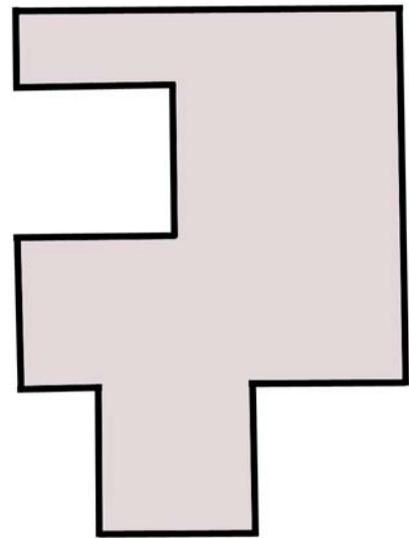


FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
1		5	
2		6	
3		7	
4			



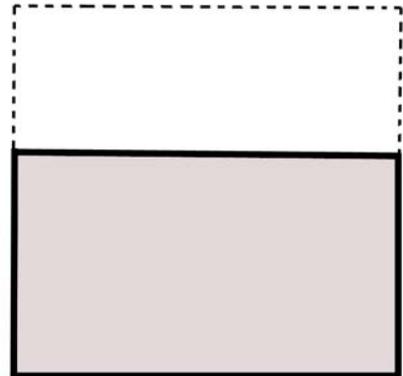
8



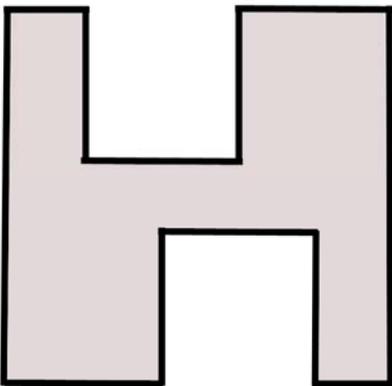
9



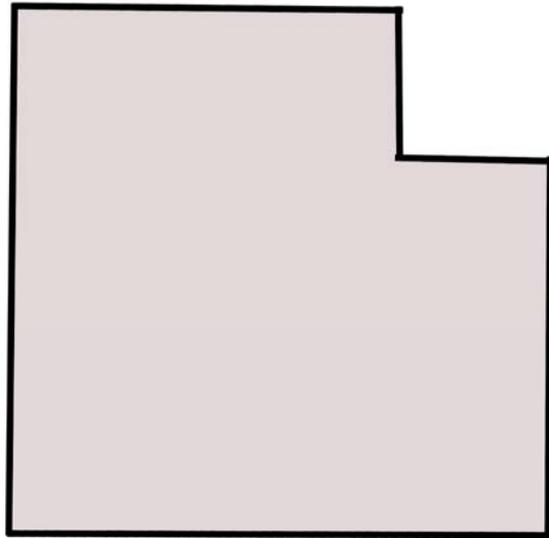
10



11

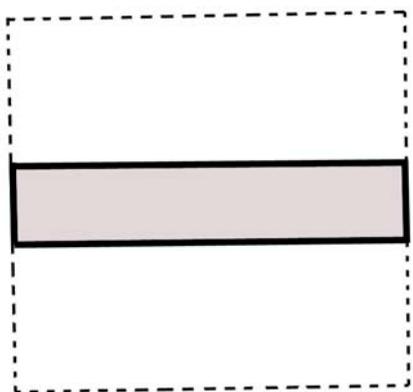


12

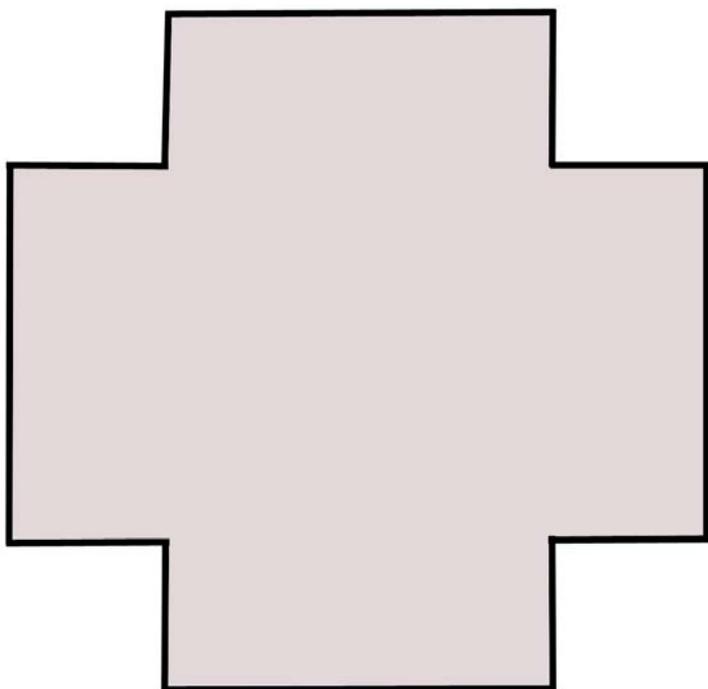


13

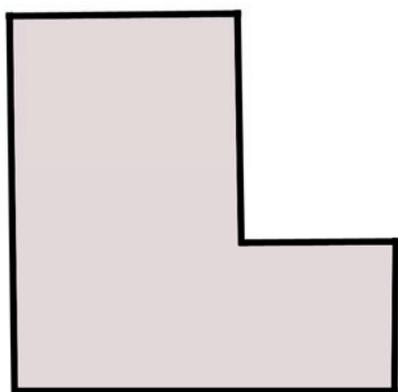
FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
8		10	
9		11	
10		12	



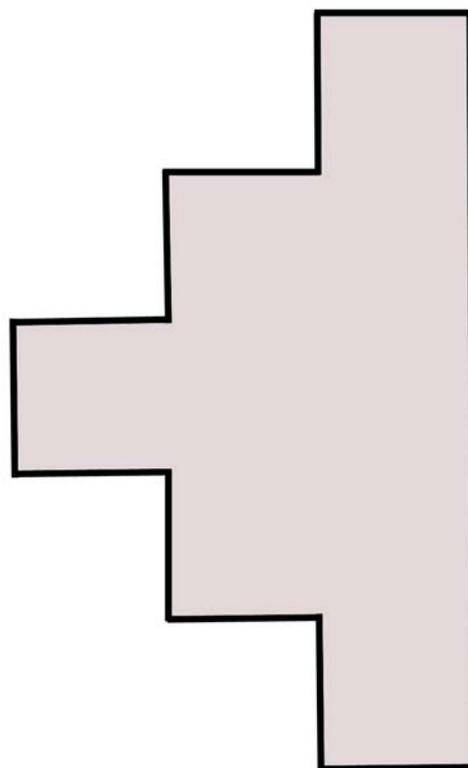
14



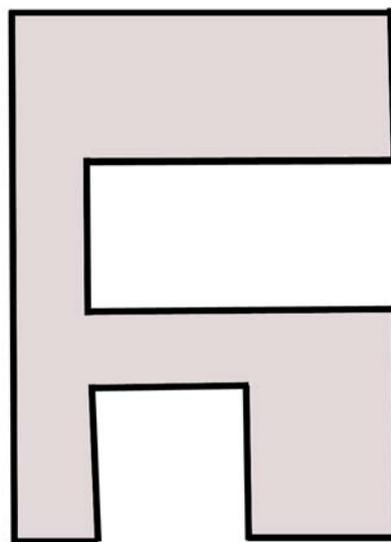
16



18



15



17



19

FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
14		17	
15		18	
16		19	

5. Calcula la superficie de las figuras en color. Cuando dividas la superficie en partes no debes dejar superficies de medio b^2 .

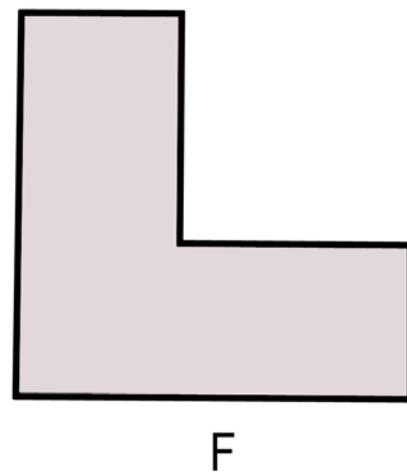
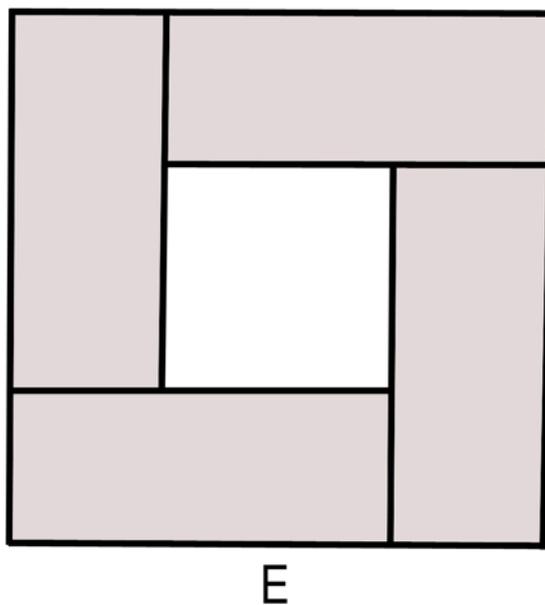
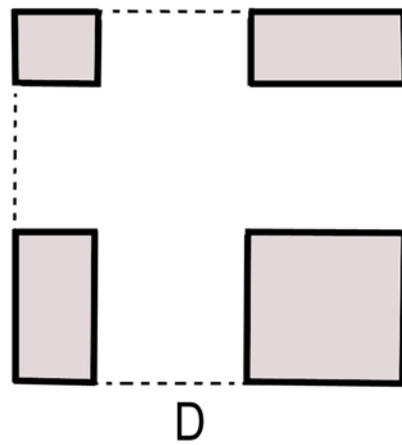
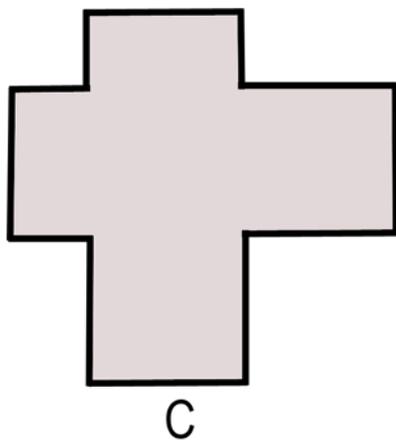
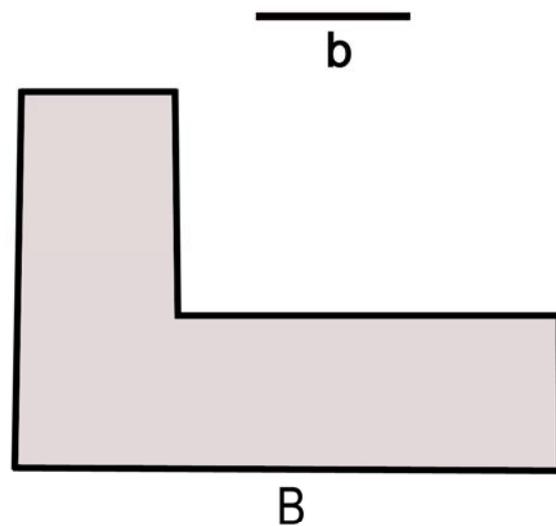
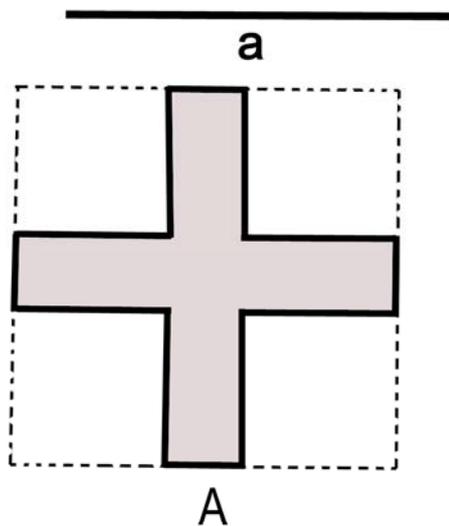
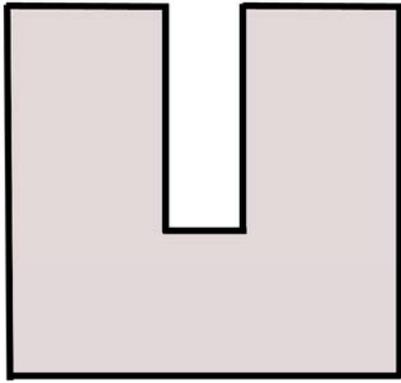
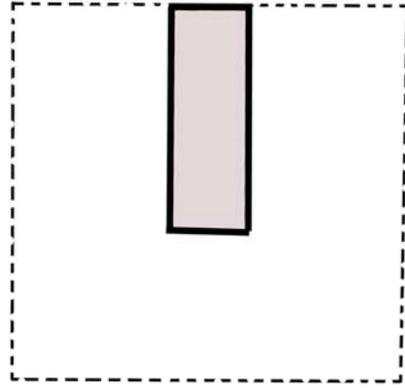


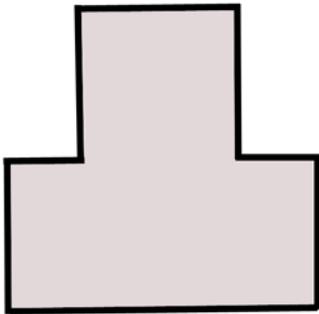
FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
A		D	
B		E	
C		F	



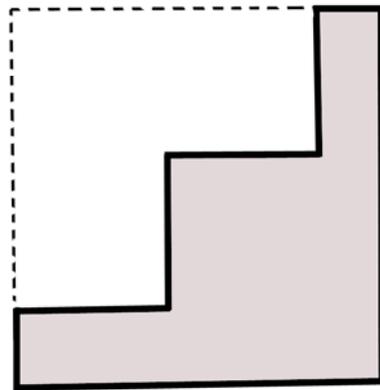
G



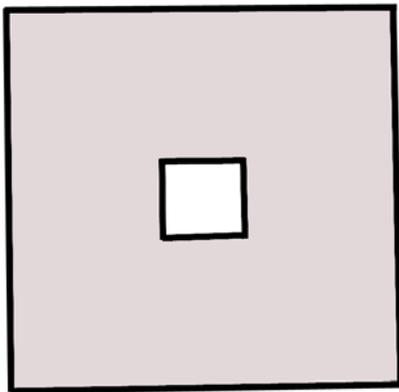
H



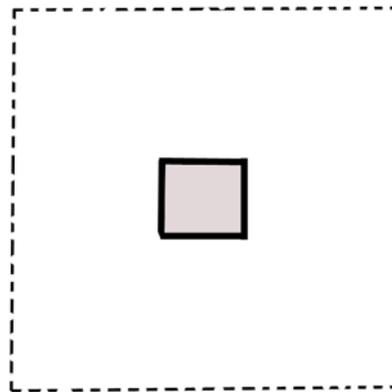
I



J

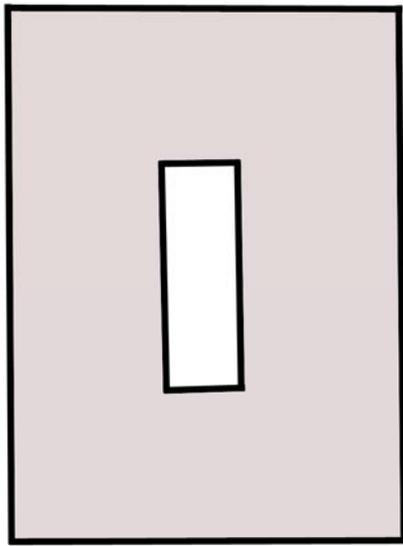


K

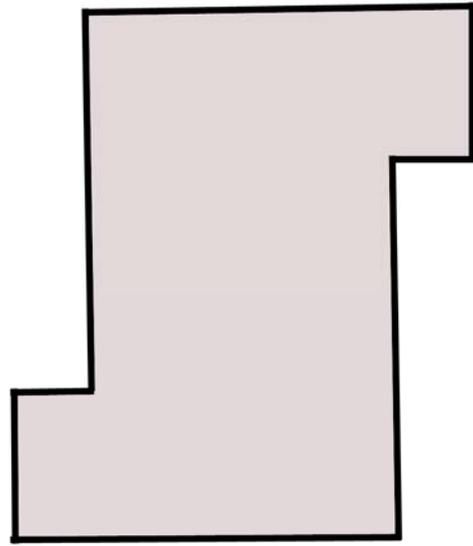


L

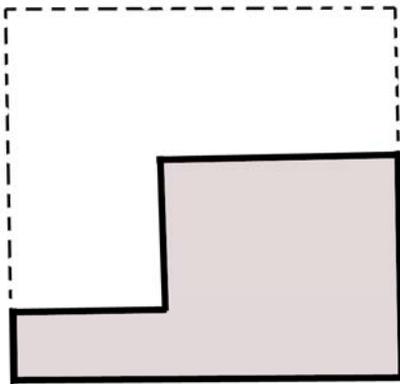
FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
G		10	J
H		11	K
I		12	L



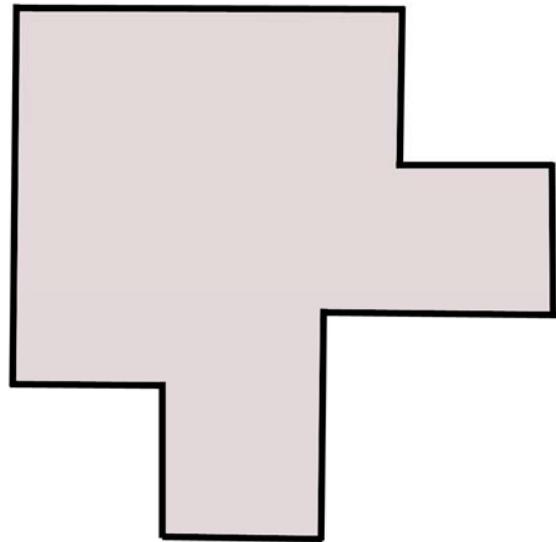
M



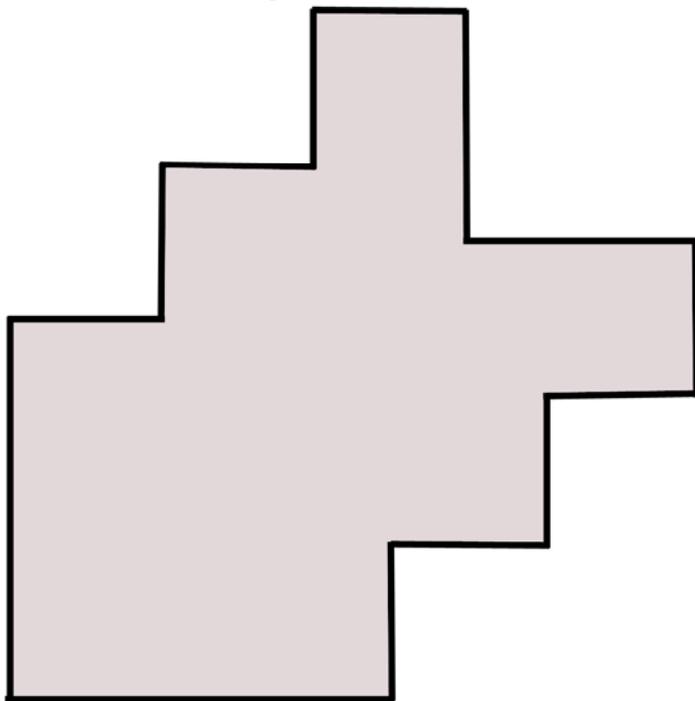
N



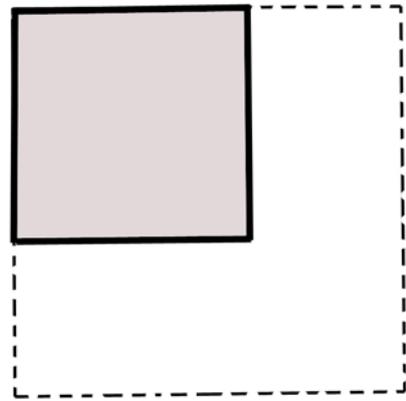
O



P



Q

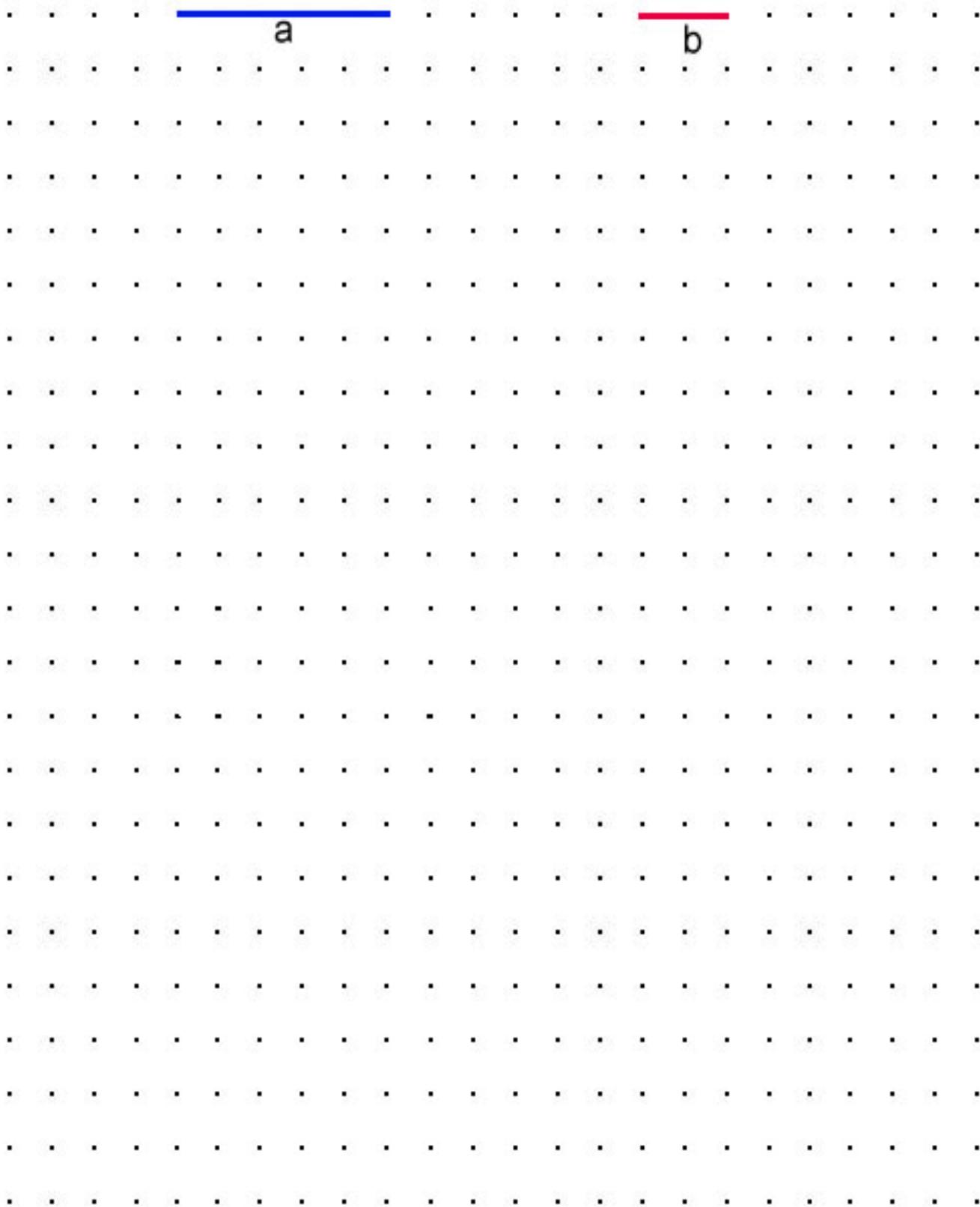


R

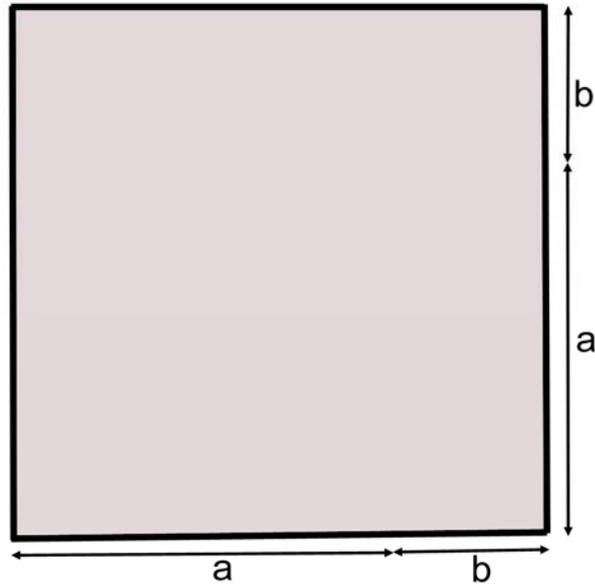
FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA	FIGURA	SUPERFICIE o ÁREA
M		10	P
N		11	Q
O		12	R

6. Dibuja en la trama cuadrada la superficie de las siguientes expresiones algebraicas:

- a) $a^2 - 3b^2$
- b) $a^2 + ab + b^2$
- c) $b^2 - 3ab + 2a^2$
- d) $(a + b) \cdot a$



7. **Demostración** .El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera.

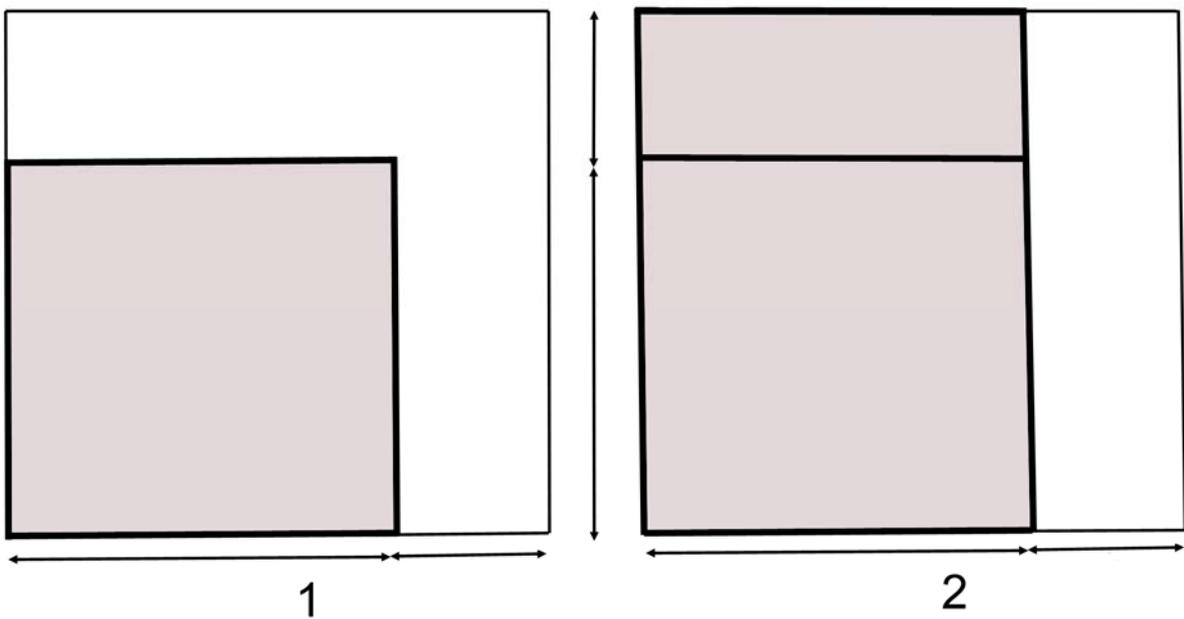


A

¿Cuánto mide el lado del cuadrado A?

¿Cuál es la superficie del cuadrado A?

Escribe la superficie de la parte coloreada de las siguientes figuras en la tabla. En las numeradas de **2** a **4** tendrás que calcular la superficie en relación con la anterior.



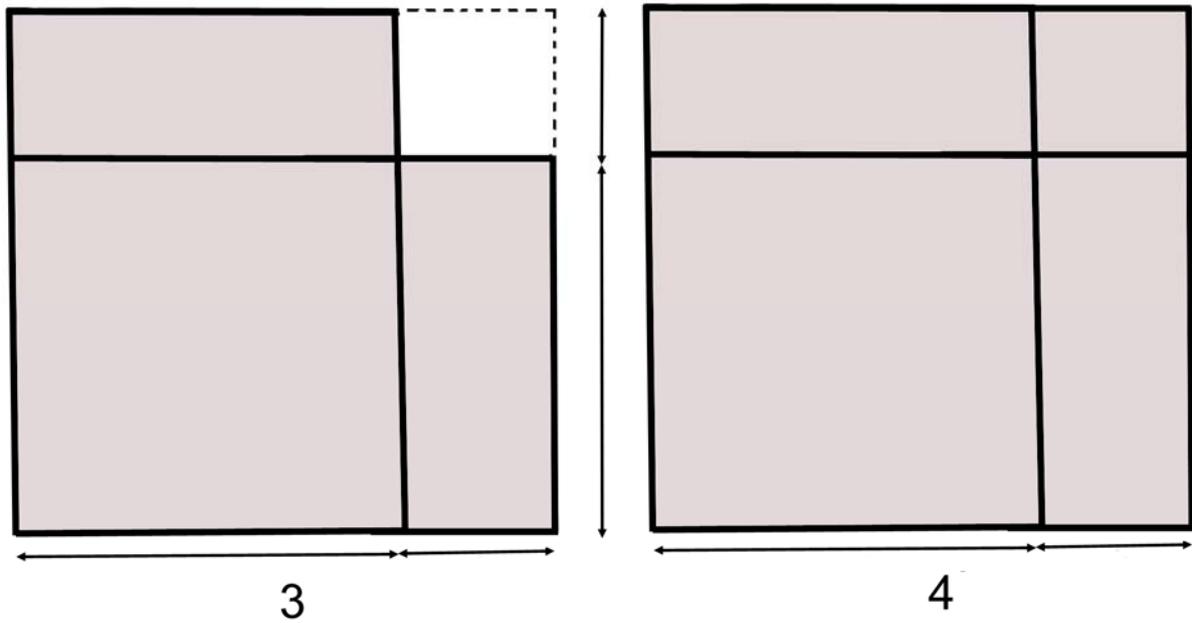


Figura	Superficie
A	
1	
2	
3	
4	

*¿Tienen la misma superficie las figuras **A** y **4**?*

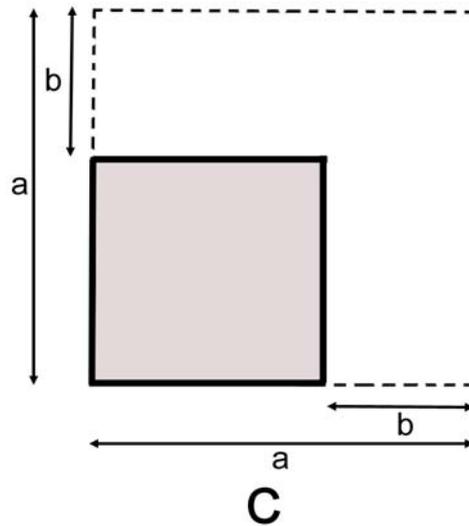
Luego se puede escribir:

$$(a + b)^2 =$$

Su enunciado podría ser así: El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número más...

8. Demostración. El cuadrado de la diferencia de dos números.

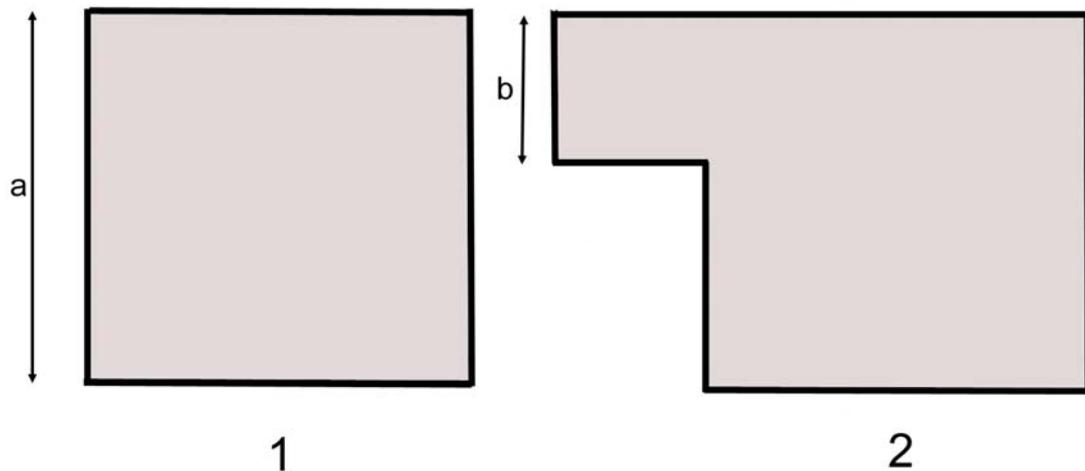
Fíjate en el cuadrado grisáceo

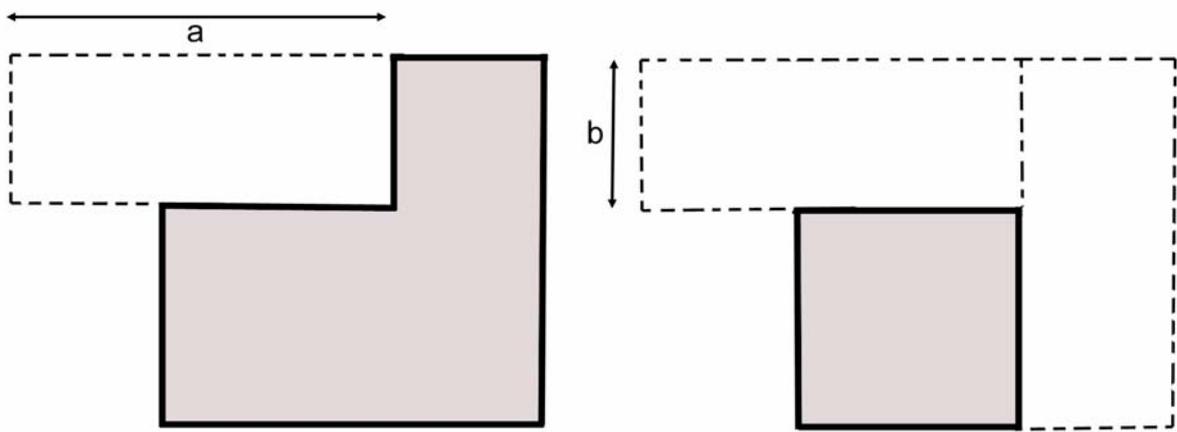


¿Cuánto mide el lado del cuadrado coloreado de la figura **C**?

¿La superficie de este cuadrado será?

Halla la superficie de las figuras coloreadas siguientes. En las numeradas del **2** al **4** tendrás que calcular su superficie en relación con la inmediata anterior.





3

4

Figura	Superficie
C	
1	
2	
3	
4	

¿Tienen igual superficie las figuras coloreadas **C** y **4**?

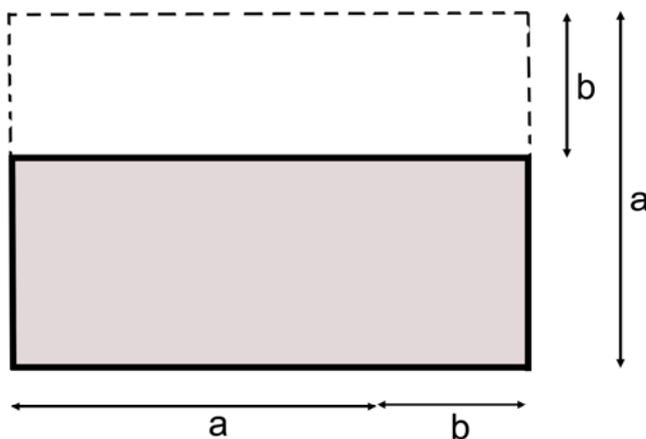
Luego podemos escribir:

$$(a - b)^2 =$$

Su enunciado podría ser así: **El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primer número...**

9. **Demostración** . El producto de la suma de dos números por su diferencia.

Fíjate en el rectángulo grisáceo.



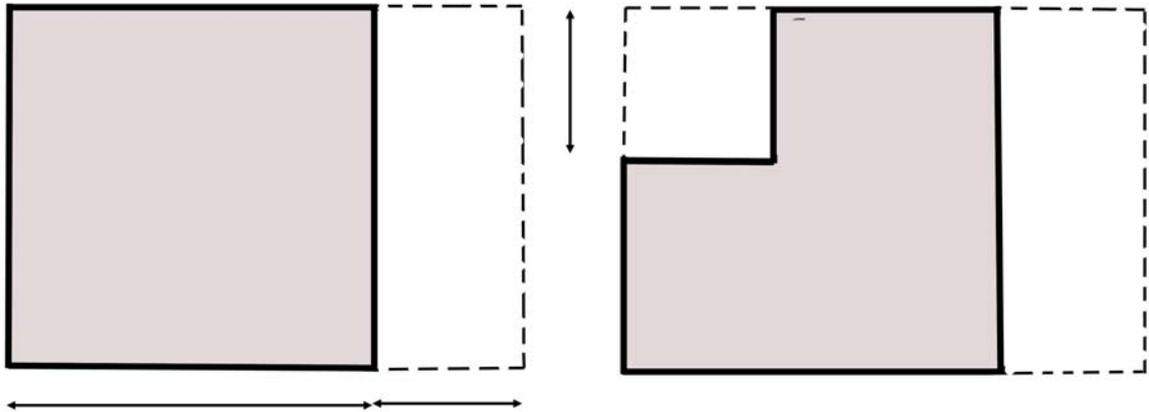
D

¿Cuánto mide la longitud del lado del rectángulo?

¿Cuánto mide su anchura?

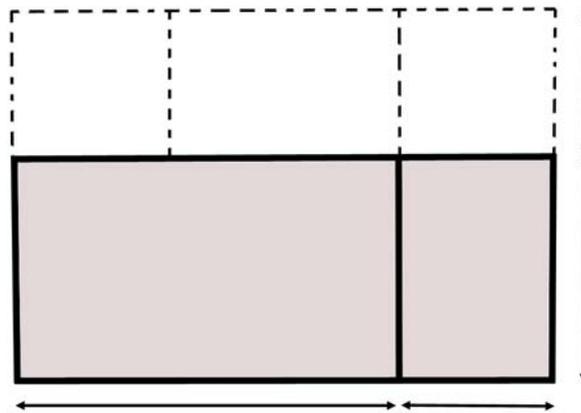
¿Cuál es su **superficie** del rectángulo **D**?

Escribe la superficie de las siguientes figuras coloreadas. En la 2 y en la 3 tendrás que poner su superficie en relación con la inmediata anterior.



1

2



3

Figura	Superficie
D	
1	
2	
3	

¿Tienen la misma superficie los rectángulos de las figuras **D** y **3**?

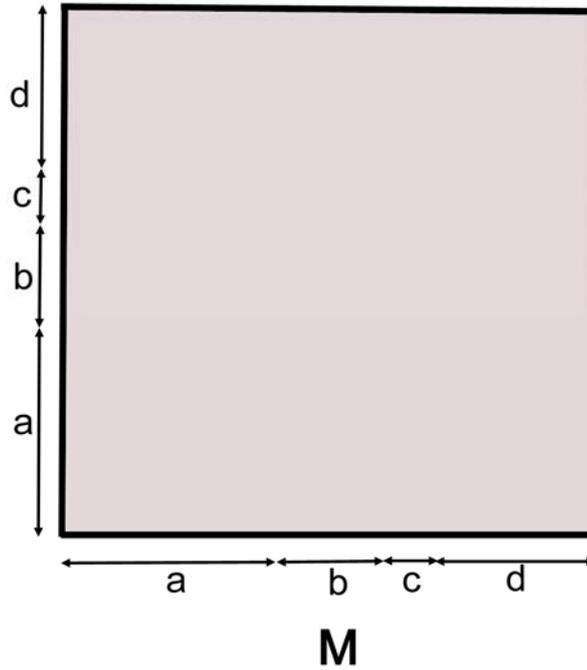
Luego podemos escribir:

$$(a + b) \cdot (a - b) =$$

Su enunciado podría ser así: **El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual...**

10. Demostración. El cuadrado de la suma de varios números.

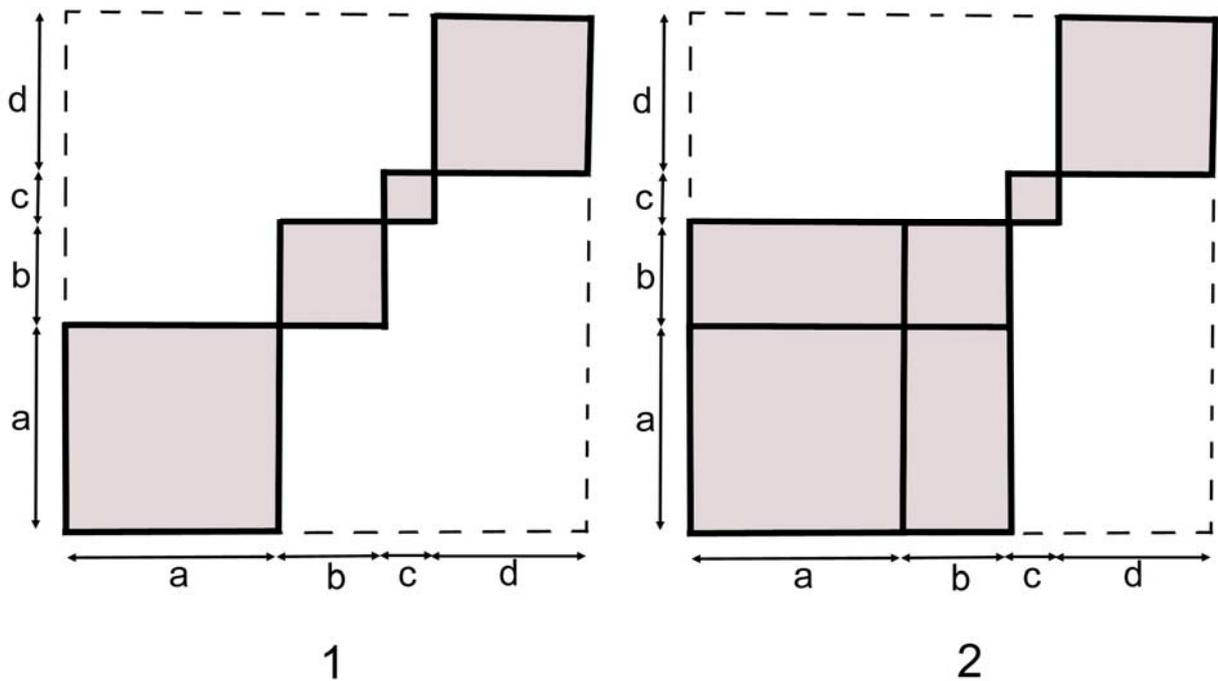
Fíjate en el cuadrado de la figura **M**.

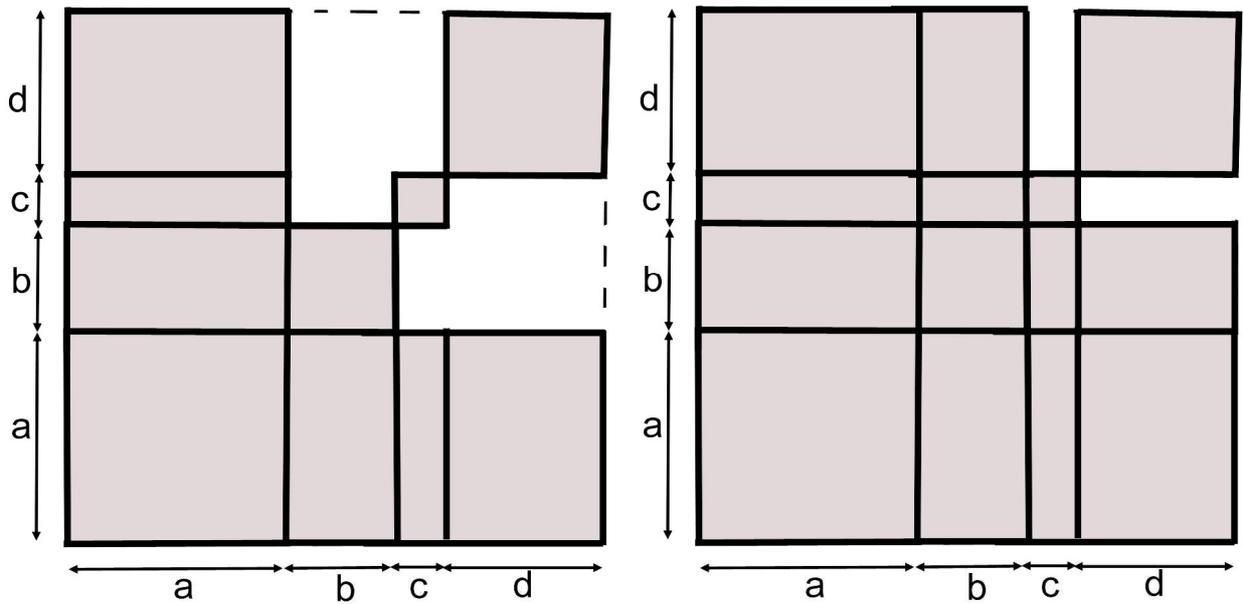


¿Cuánto mide su lado?

¿Cuál será su superficie?

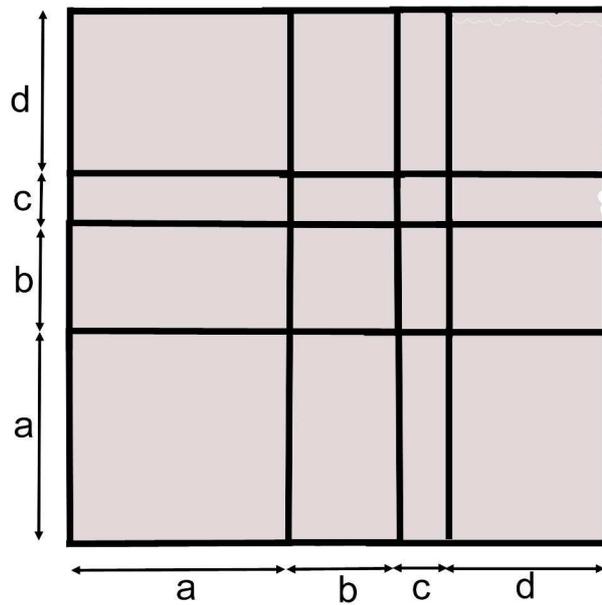
Escribe la superficie coloreada de las figuras que aparecen a continuación. La superficie de las figuras 2 a la 5 estará relacionada con la inmediata anterior.





3

4



5

Figura	Superficie	Figura	Superficie
M		3	
1		4	
2		5	

¿Tienen la misma superficie los cuadrados M y 5?

Luego podemos escribir: $(a + b + c + d)^2 =$

Su enunciado podría ser así: **El cuadrado de la suma de varios números es igual al cuadrado...**

11. Dadas las longitudes a , b y c , representa en la trama triangular cuerpos que tengan por volúmenes las siguientes expresiones:

1) $a^2 + b^2$

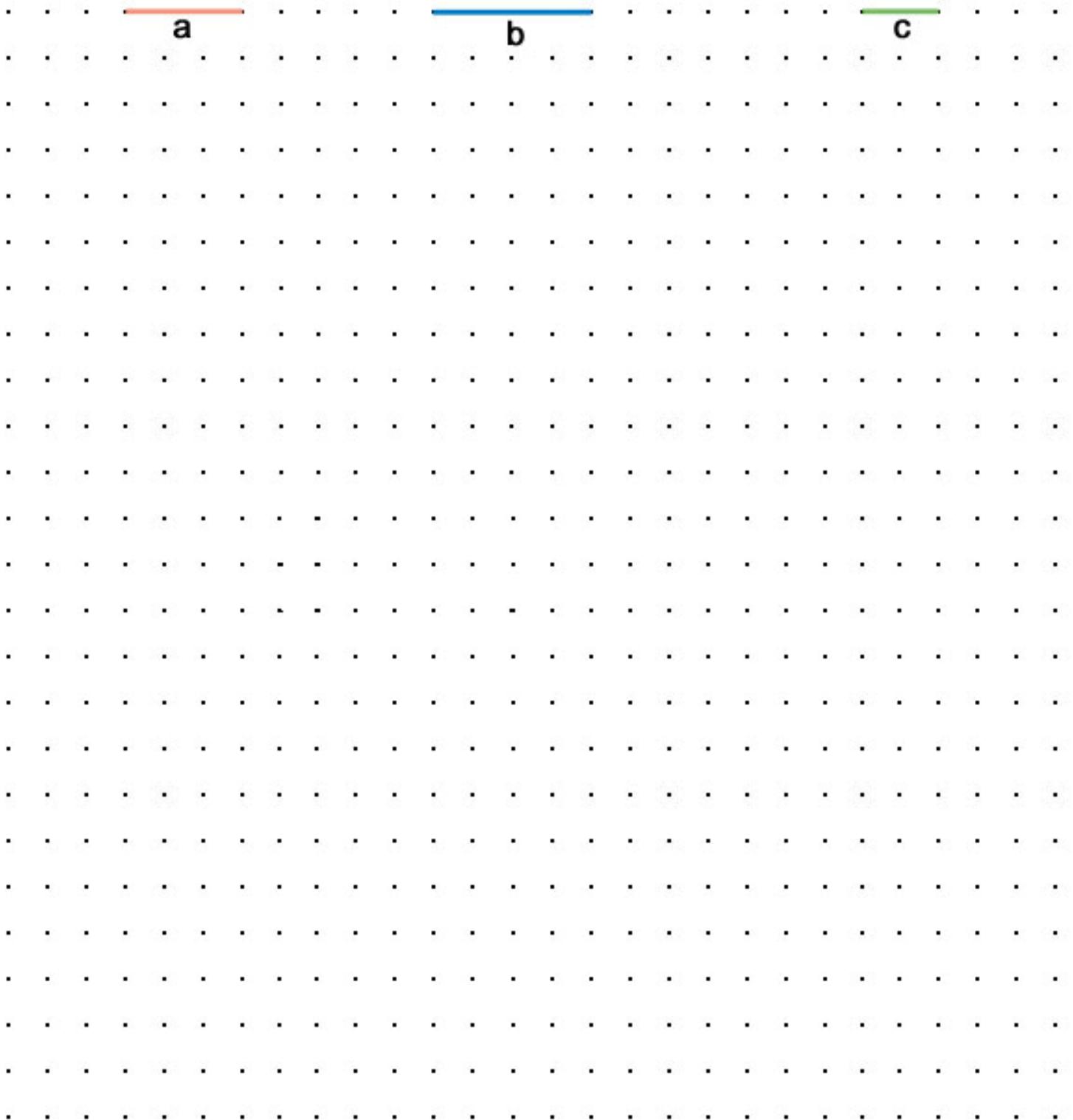
2) $a^2 - b^2$

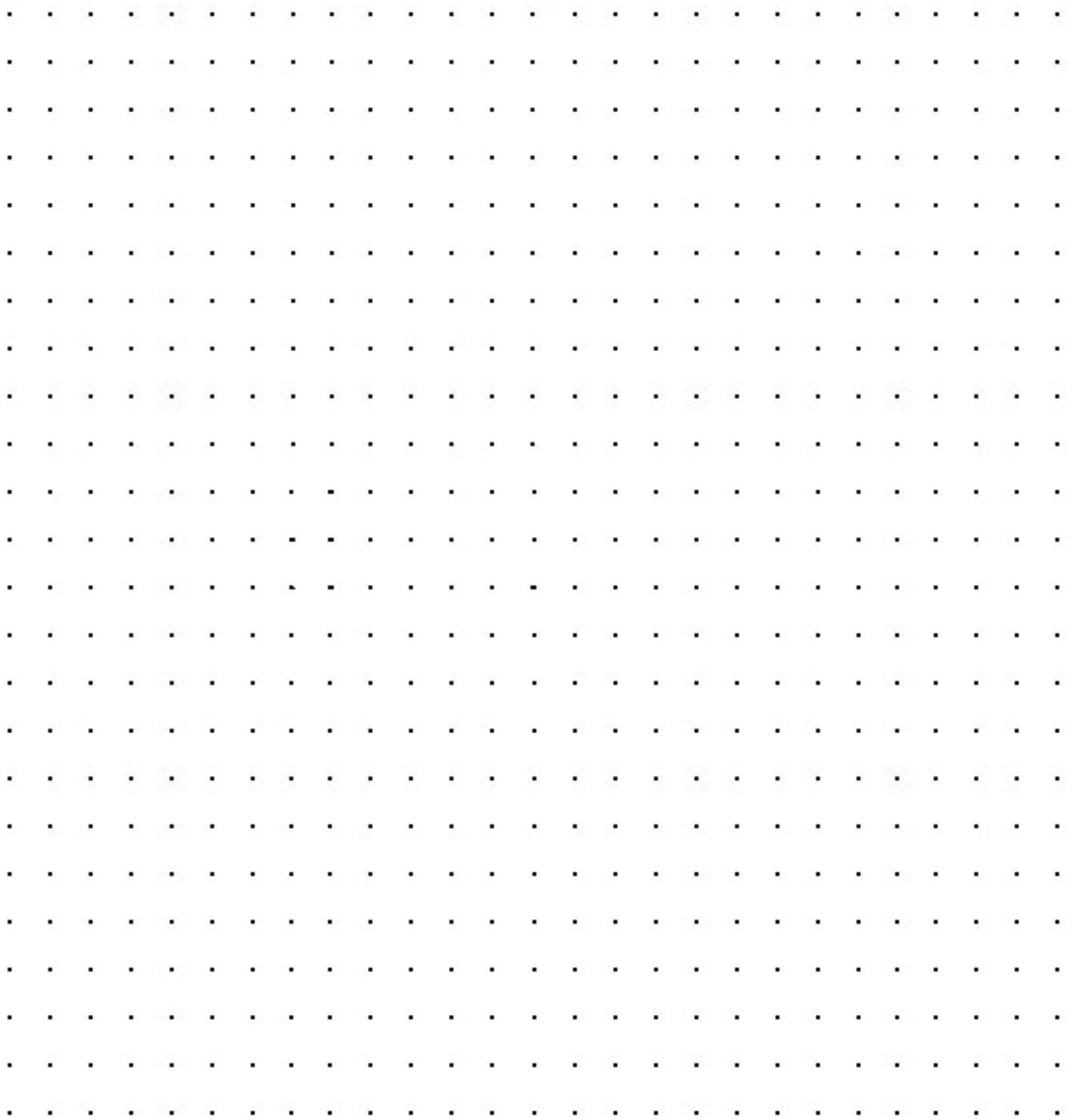
3) $(a + b)^2$

4) $(a - b)^2$

5) $a^2 + b^2 + c^2$

4) $(a + b + c)^2$





**ACTIVIDADES Y MATERIALES
DE TRABAJO
LOS CUBOS**

Objetivos didácticos de los cubos

- Reforzar el cálculo numérico del cubo de número, del cubo de una suma, del cubo de una diferencia y de la suma o diferencia de cubos de dos números.
- Expresar en lenguaje algebraico el volumen de cuerpos geométricos en función de ciertas longitudes algebraicas dadas.
- Representar geoméricamente una expresión algebraica.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el cubo de la suma de dos números.
- Demostrar geoméricamente a qué es igual el cubo de la diferencia de dos números.)
- Dibujar en perspectiva ortoedros.
- Confrontar geoméricamente la no igualdad de ciertas expresiones.

$$a^3 + b^3 \text{ y } (a + b)^3$$

$$a^3 - b^3 \text{ y } (a - b)^3$$

Conocimientos previos

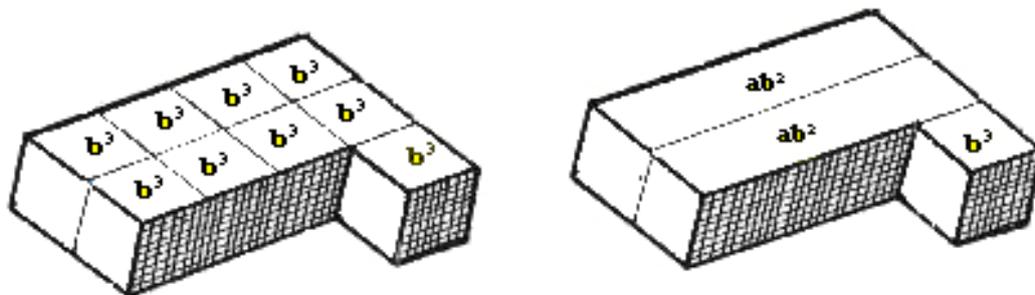
Para el desarrollo de la unidad didáctica será necesario que los alumnos conozcan:

1. Conocimiento del cálculo del volumen en cubos y ortoedros.
2. Operaciones básicas algebraicas
3. Cierta conocimiento básico del dibujo en perspectiva

Algunos comentarios a las actividades

En el cálculo del volumen por descomposición de las figuras tridimensionales de los ejercicios propuestos se deben poner cláusulas, pues de no hacerlo algunos alumnos las verían compuestas por cubos pequeños de volumen b^3 . La restricción será: "No se pueden descomponer en cubos contiguos de volumen b^3 ".

Pongamos el ejemplo de la figura 14 del ejercicio 4.



Para calcular su volumen se podrían hacer entonces al menos dos descomposiciones como las que aparecen en la figura.

El volumen de la primera figura, según la descomposición, sería: $9b^3$

El volumen de la segunda figura, sería: $2ab^2 + b^3$

Sin la restricción, tendríamos que admitir la igualdad de volumen de ambas y por tanto que

$$9b^3 = 2ab^2 + b^3$$

La anterior igualdad sólo es cierta cuando $a = 4b$.

12. Calcula el valor de:

$$7^3 + 4^3 =$$

$$8^3 - 5^3 =$$

$$(10 + 3)^3 =$$

$$(15 - 6)^3 =$$

13. Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades.

$$(12 + 5)^3 = 12^3 + 5^3$$

$$(20 - 8) (20 - 8) (20 - 8) = (20 - 8)^3$$

$$40^3 - 25^3 = (40 - 25)^3$$

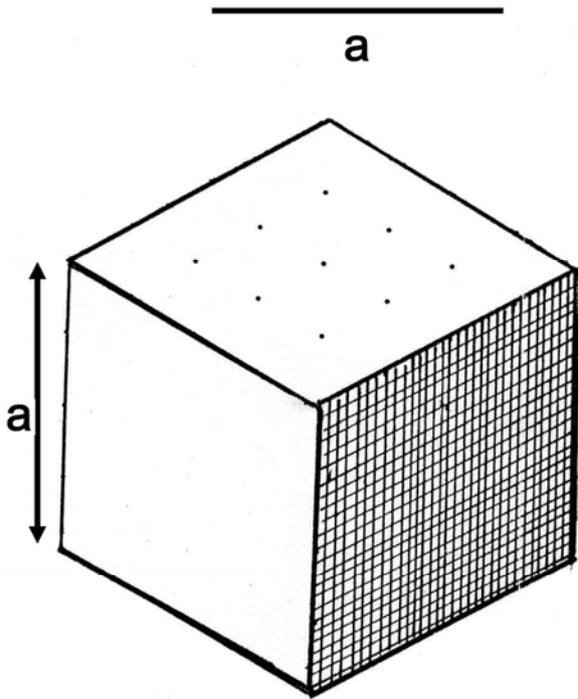
$$(42 + 8)^3 = (42 + 8) (42 + 8) (42 + 8)$$

14. Escribe matemáticamente:

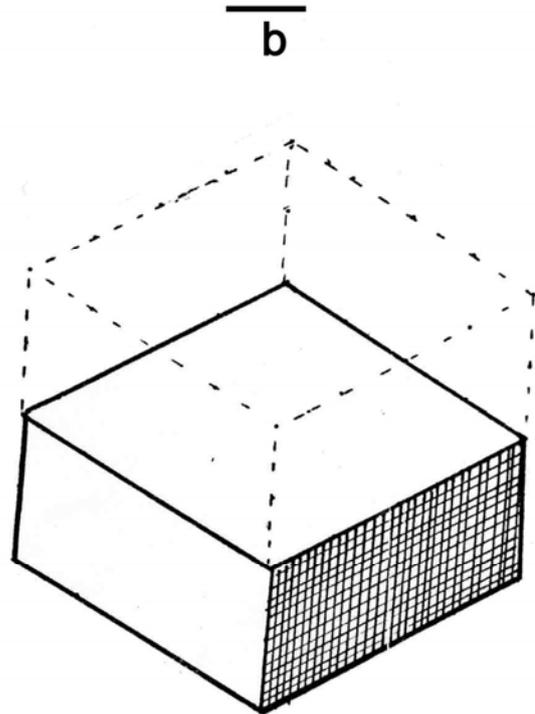
- a) la suma de cinco al cubo y de catorce al cubo
- b) el cubo de la suma de cinco y catorce
- c) la diferencia de los cubos de setenta y treinta y ocho
- d) el cubo de la diferencia entre ciento dieciséis y ochenta y siete
- e) el cubo del doble de cuatrocientos

15. Tendrás que calcular el **VOLUMEN** de las figuras dibujadas. En ellas siempre conoces la longitud de sus aristas: pueden ser a o b, casi siempre.

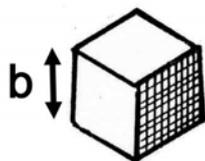
Da la respuesta de forma algebraica. Para medir y comparar los lados es muy útil el compás.



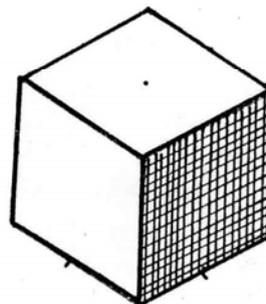
1



2

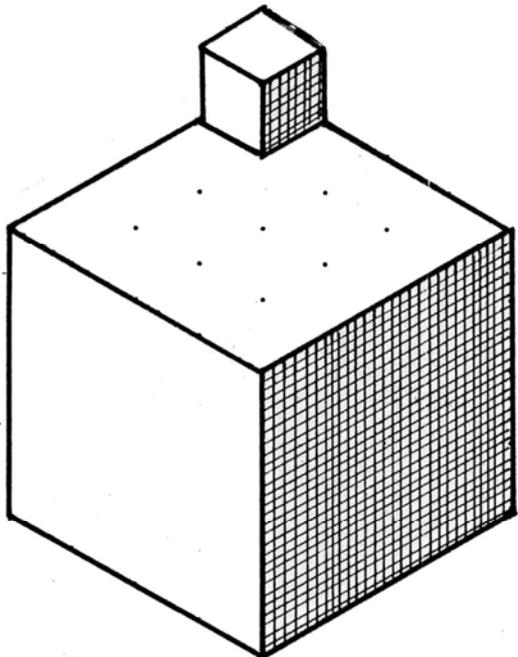


3

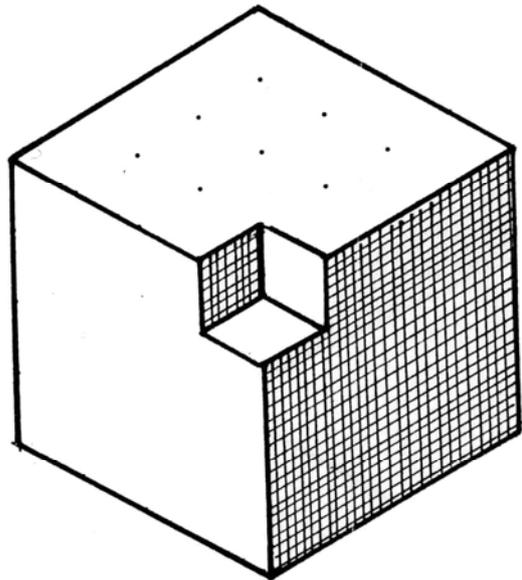


4

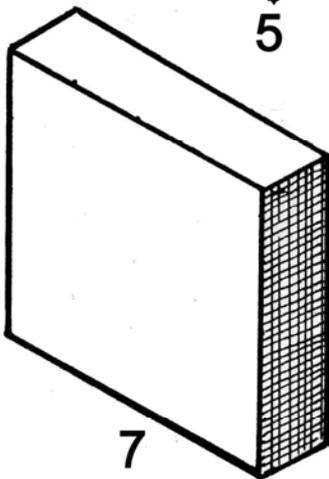
FIGURA	VOLUMEN
1	
2	
3	
4	



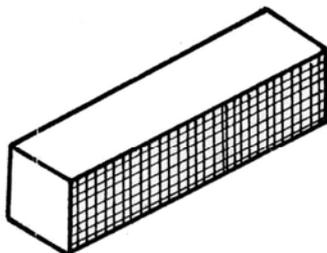
5



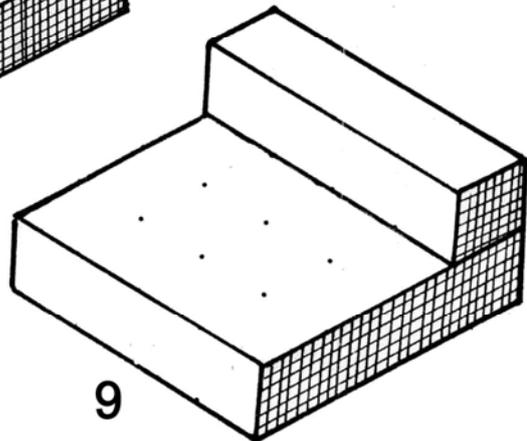
6



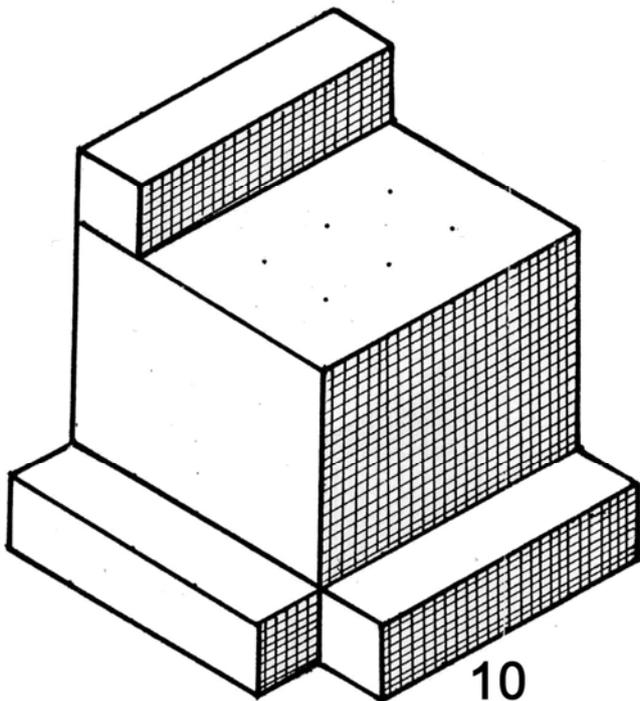
7



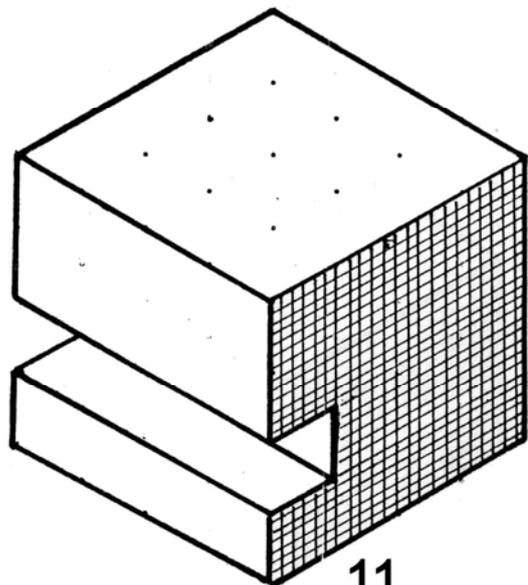
8



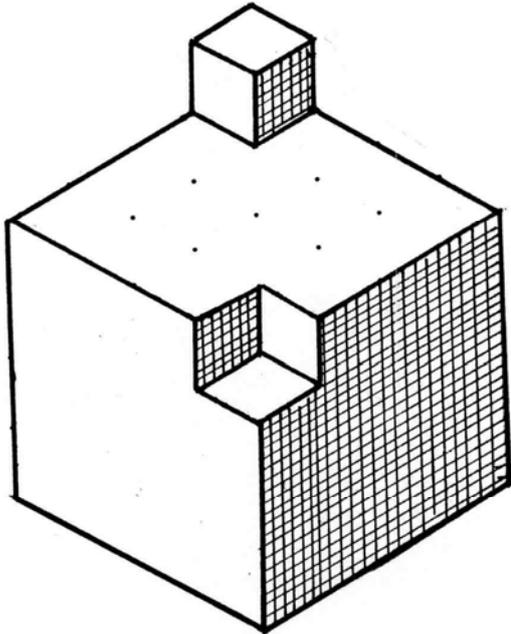
9



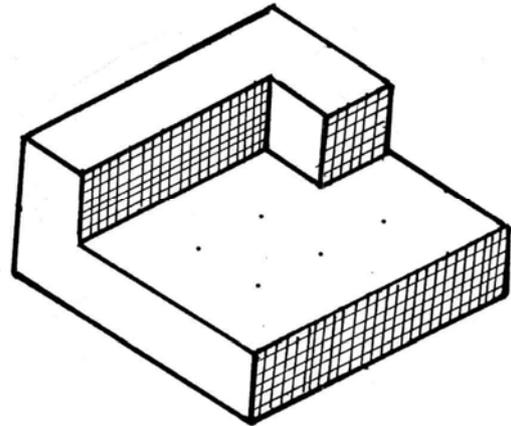
10



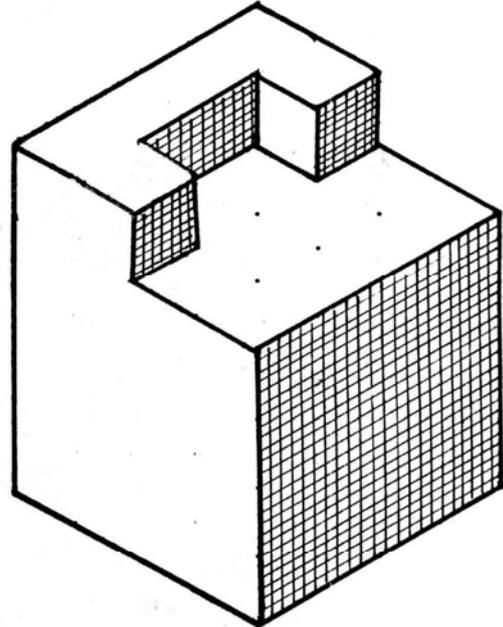
11



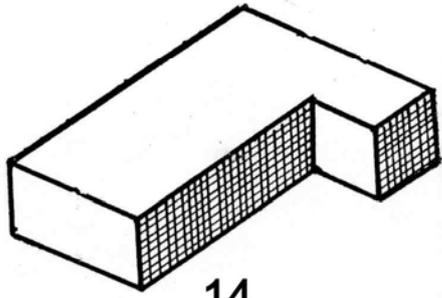
12



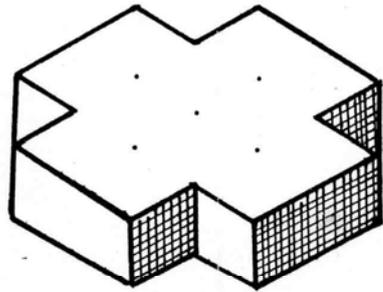
13



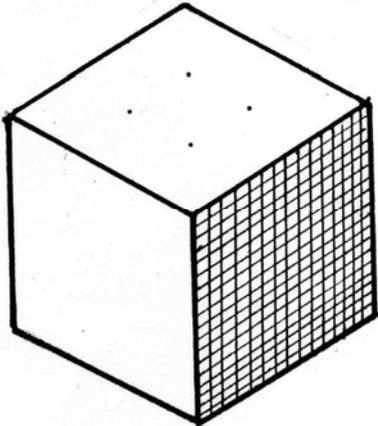
15



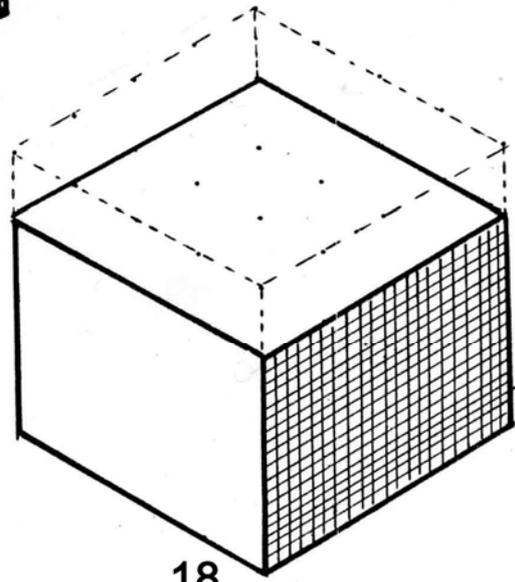
14



16



17

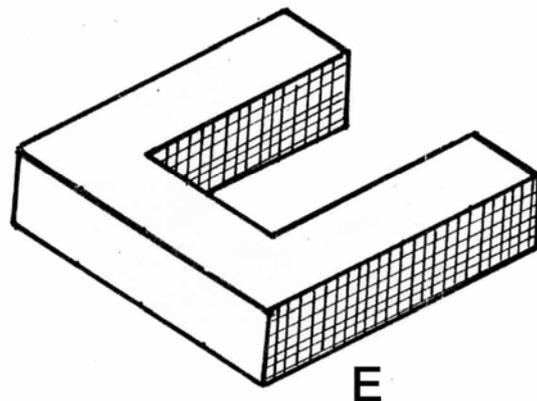
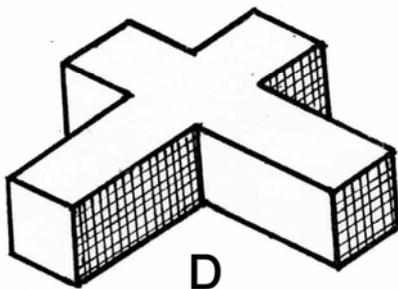
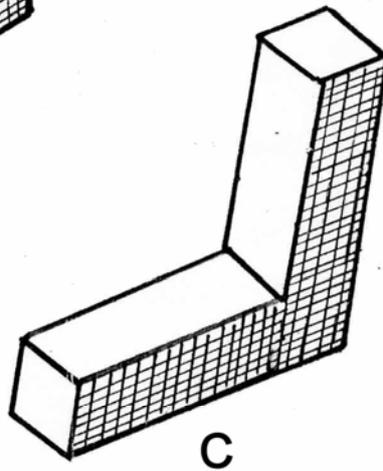
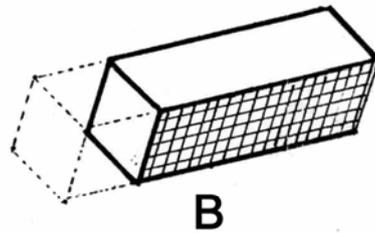
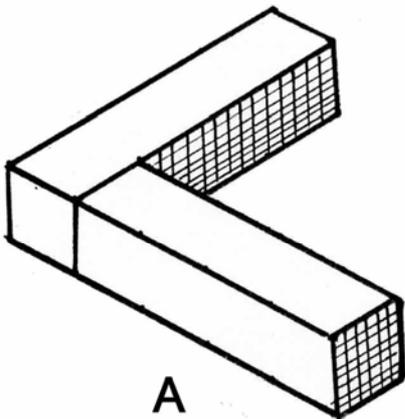


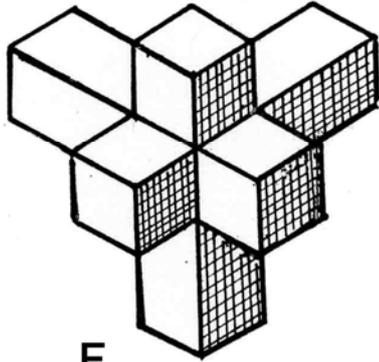
18

FIGURA	VOLUMEN	FIGURA	VOLUMEN
5		11	
6		12	
7		13	
8		14	
9		15	
10		16	

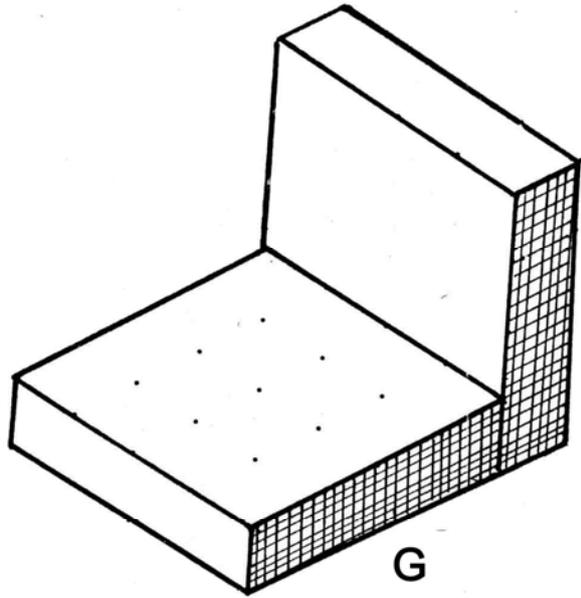
16. Calcula el volumen de las figuras dibujadas. Ha aumentado ligeramente la dificultad.

(No podrás utilizar el argumento ab^2 igual a $4b^3$)

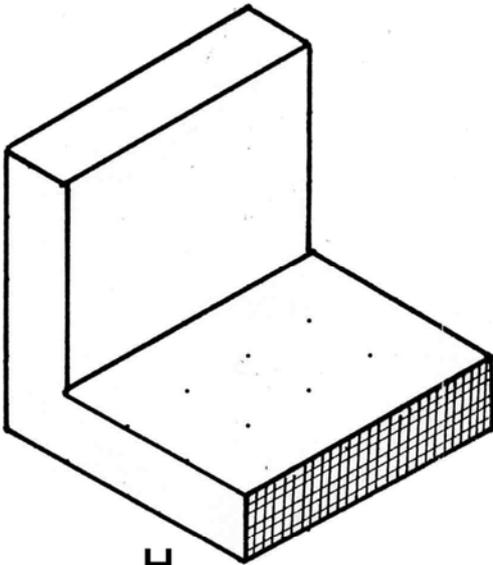




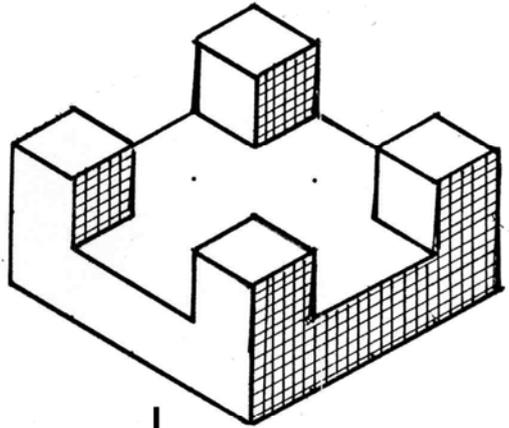
F



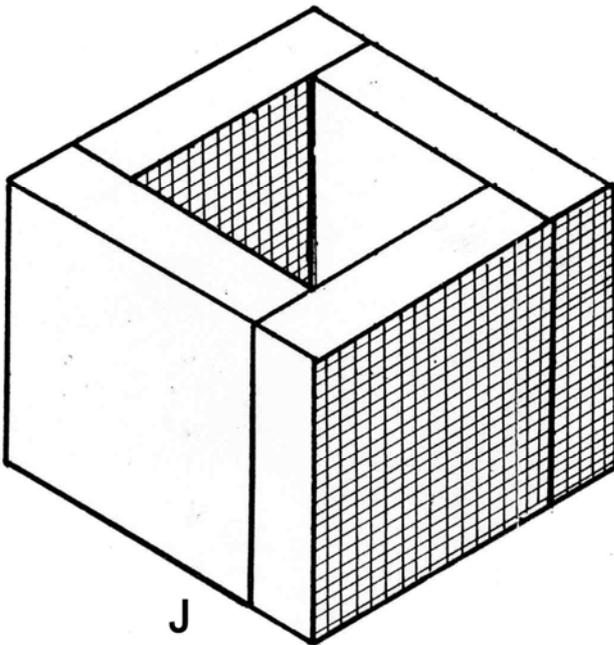
G



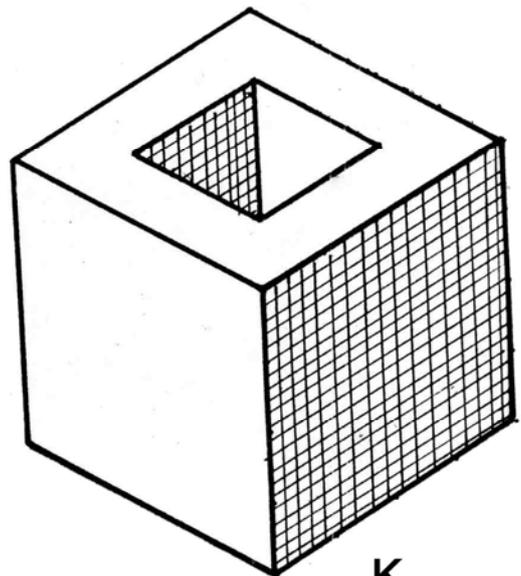
H



I



J



K

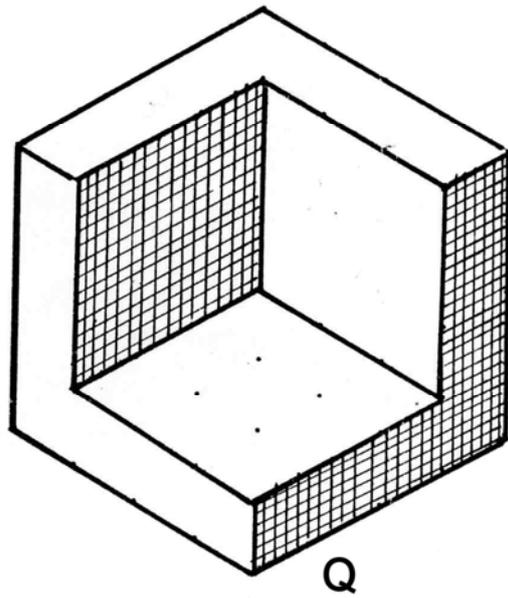
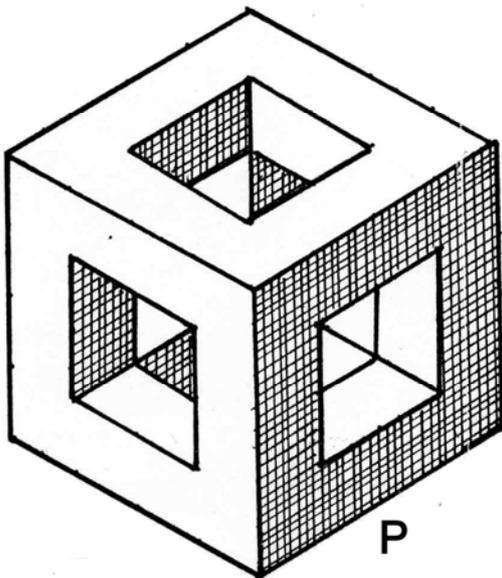
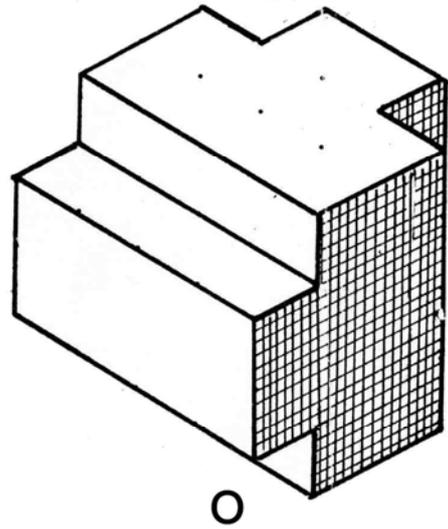
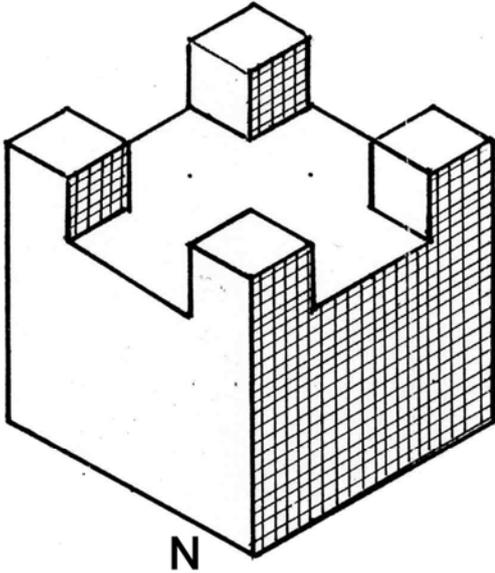
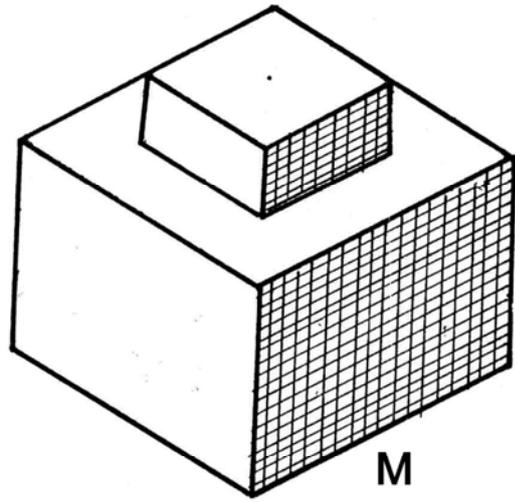
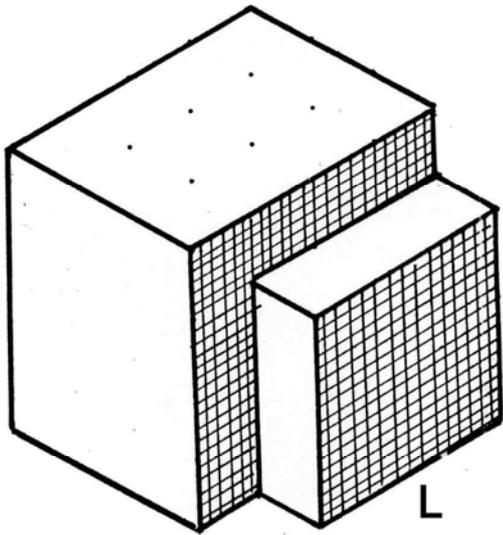
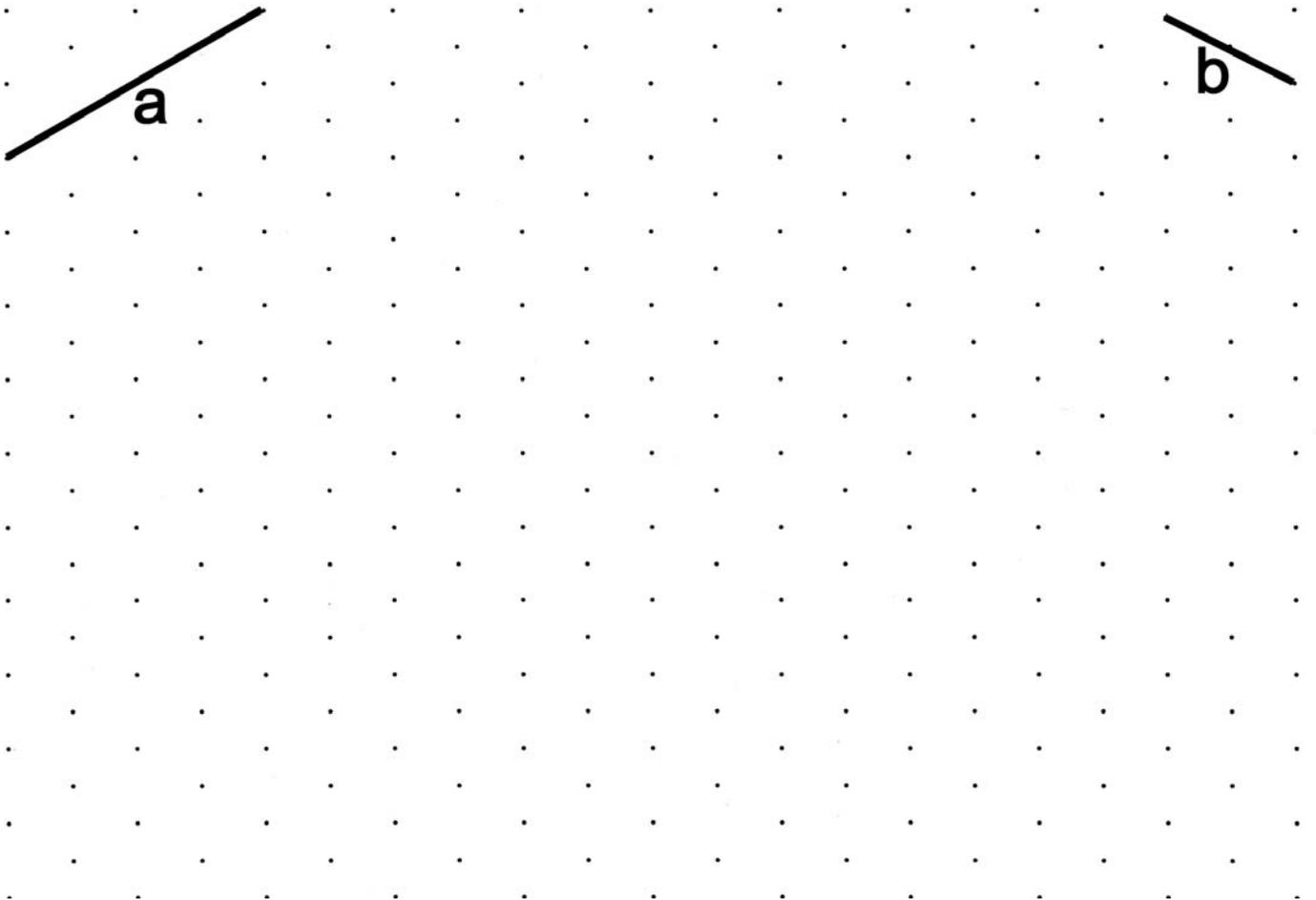
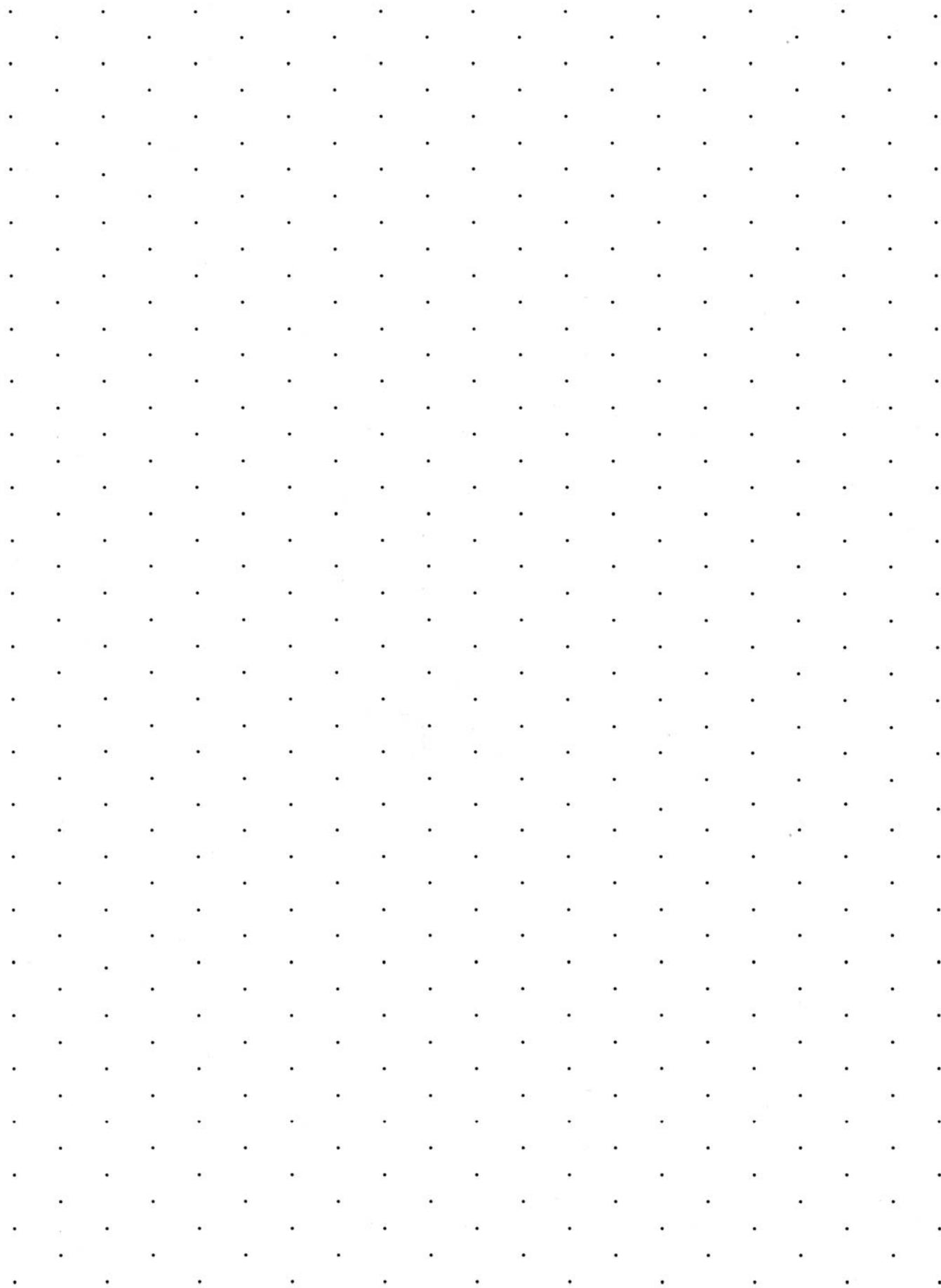


FIGURA	VOLUMEN	FIGURA	VOLUMEN
A		J	
B		K	
C		L	
D		M	
E		N	
F		O	
G		P	
H		Q	
I			

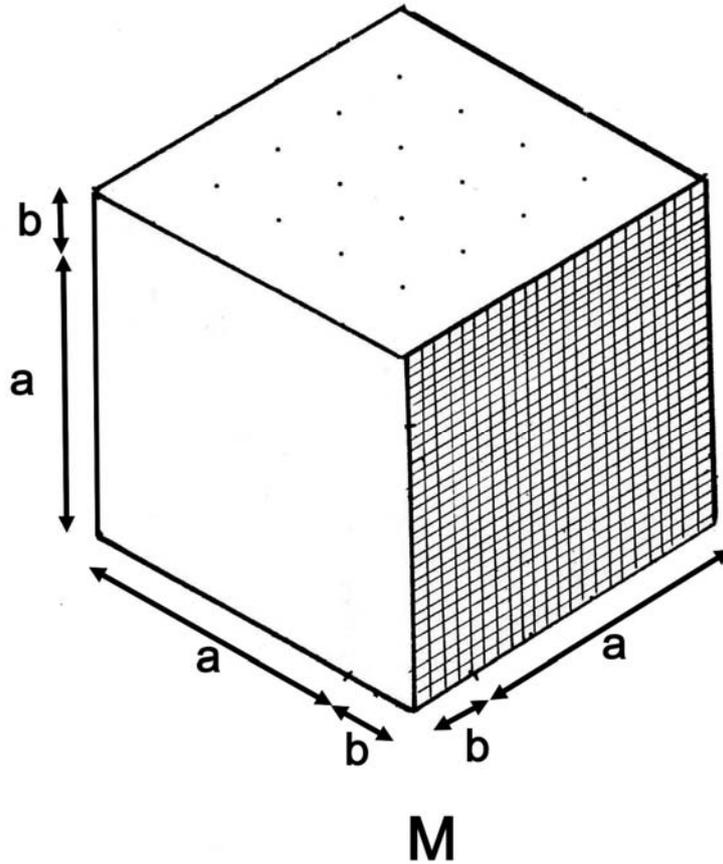
17. Dibuja en la trama triangular de una forma compacta los cuerpos que tienen los siguientes volúmenes:

- a) $a^3 / 2$
- b) $a^2b + b^3$
- c) $a^3 - 2ab^2$
- d) $a^2b + ab^2 - 2b^3$





18. Demostración. El cubo de la suma de dos números cualesquiera.

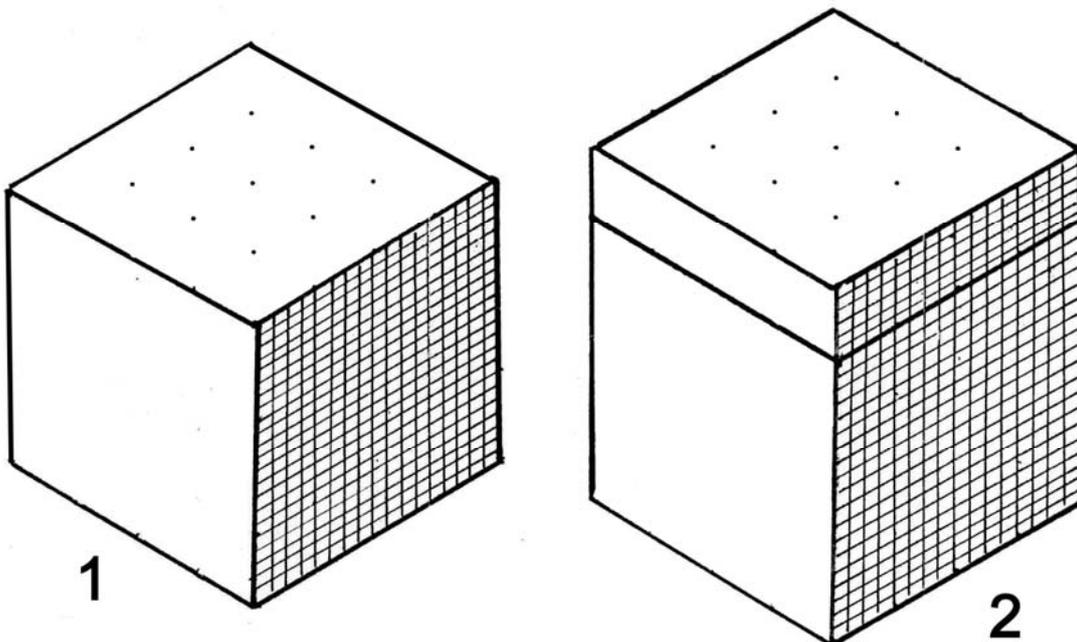


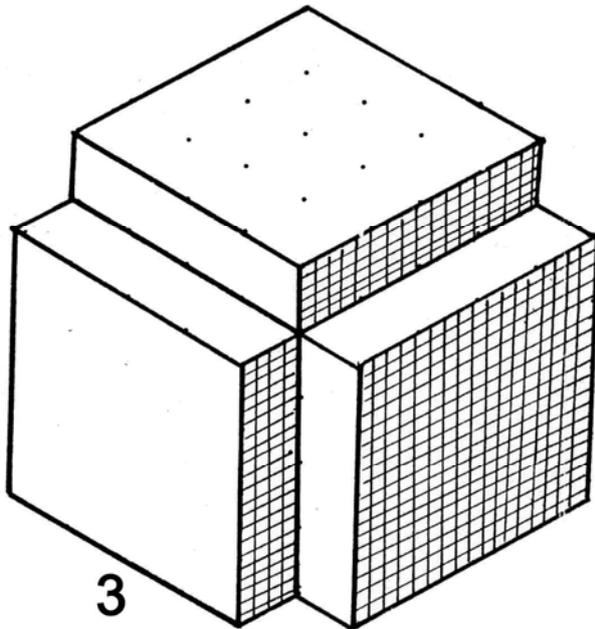
¿Cuánto mide el lado del cubo **M**?

¿Cuál es el **volumen** de la figura **M**?

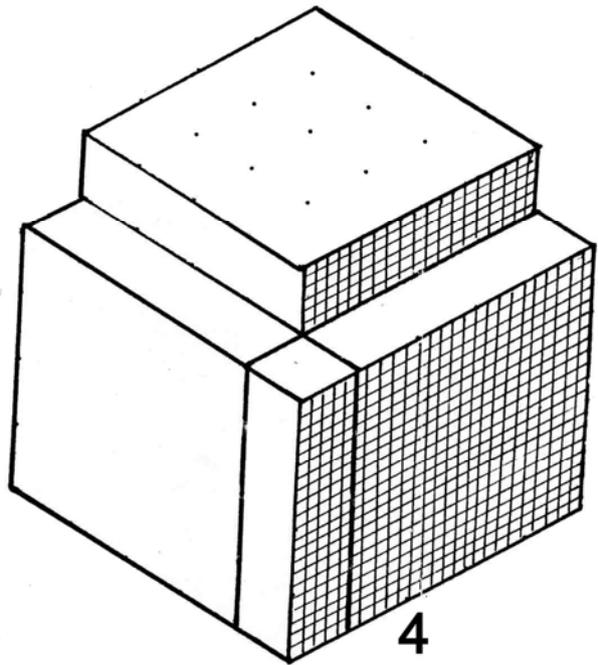
Escribe en la tabla el **volumen** de las siguientes figuras.

(En las numeradas de 1 a 6 tendrás que escribir el volumen en relación con la inmediata anterior)

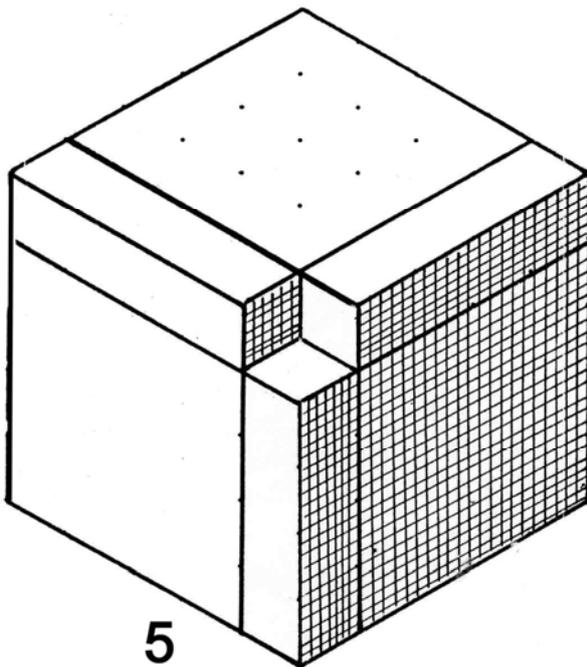




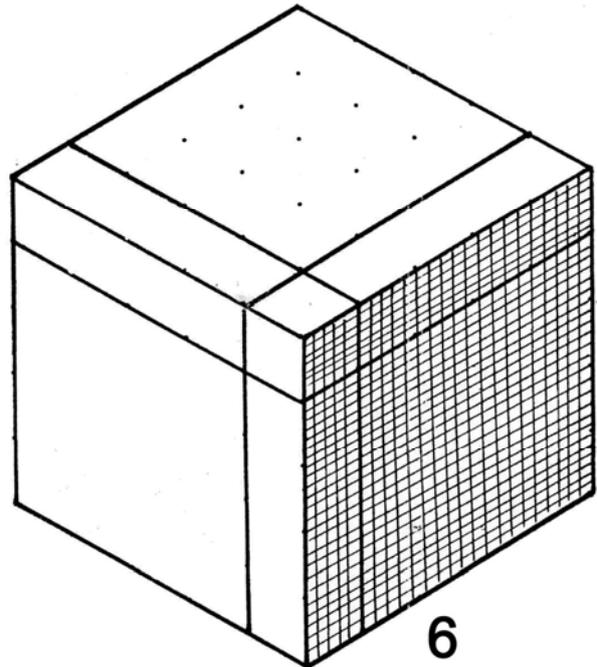
3



4



5



6

FIGURA	VOLUMEN
M	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

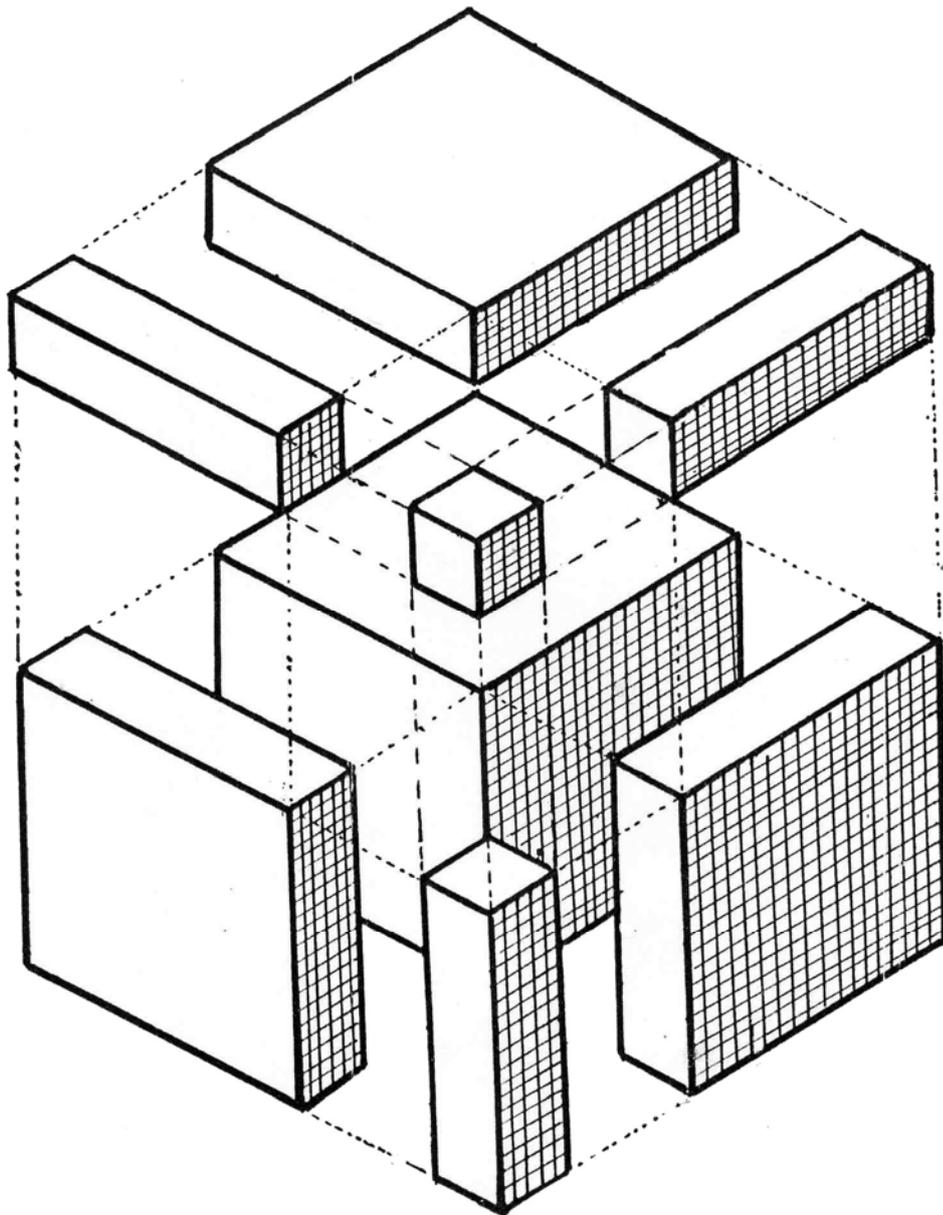
¿Tienen el mismo volumen las figuras **M** y **6**?

Luego se puede escribir:

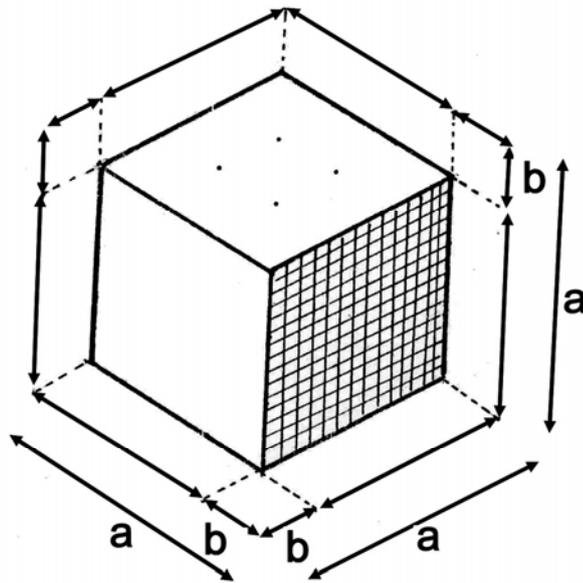
$$(a + b)^3 =$$

Su enunciado podría ser así:

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número más...



19. Demostración. El cubo de la diferencia de dos números.



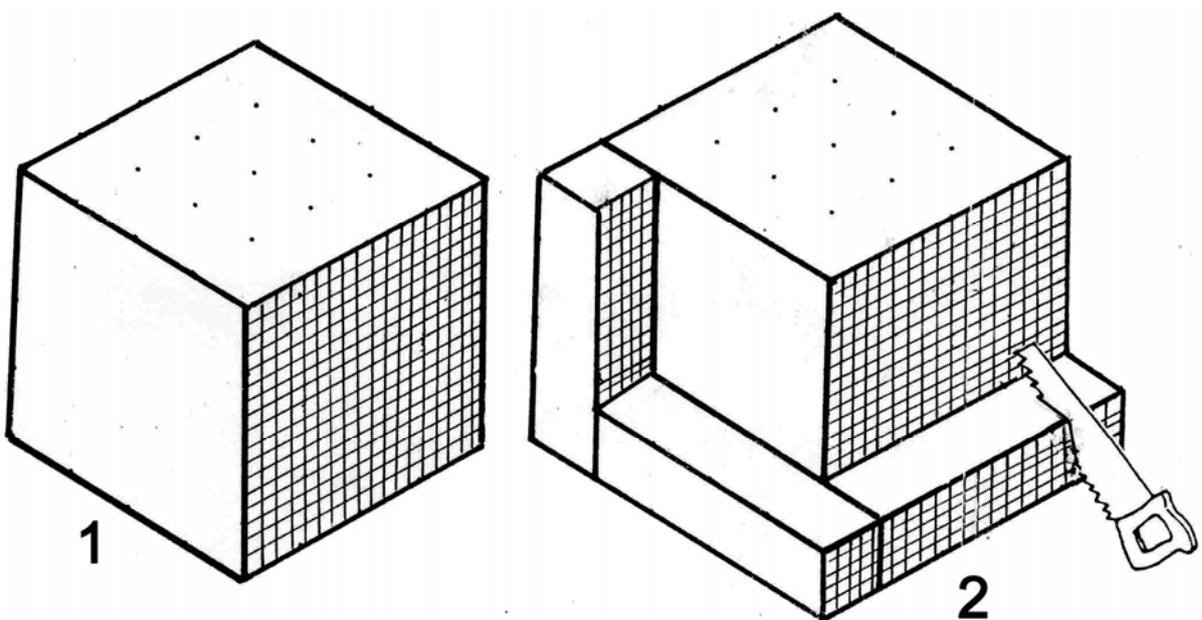
P

¿Cuánto mide el lado del cubo P?

¿Cuál es su volumen?

Escribe en la tabla el **volumen** de las siguientes figuras. También en este ejercicio tendrás que escribir el volumen de las numeradas 1 al 6 en relación con la inmediata anterior.

(El **serrucho** indica el lugar donde se va a producir la sustracción de volumen en la figura siguiente.)



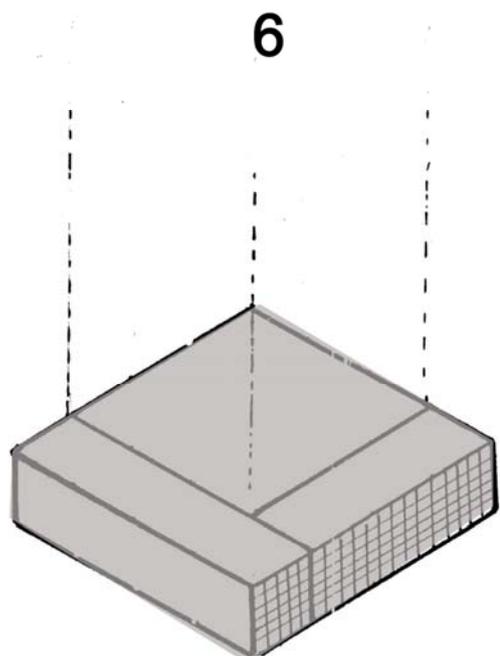
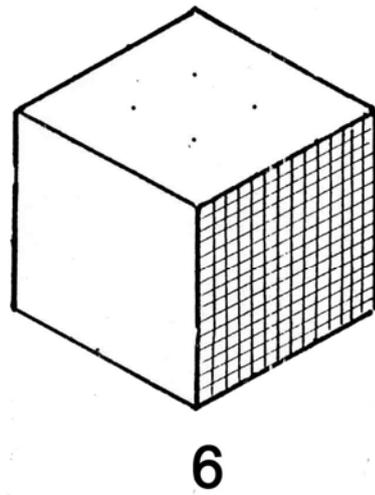
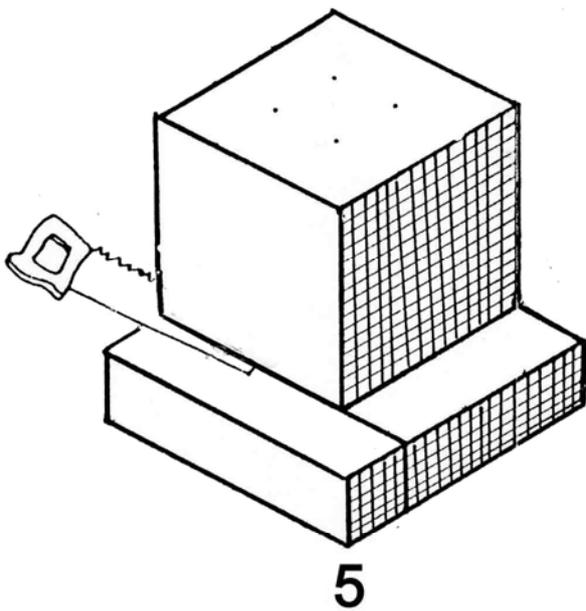
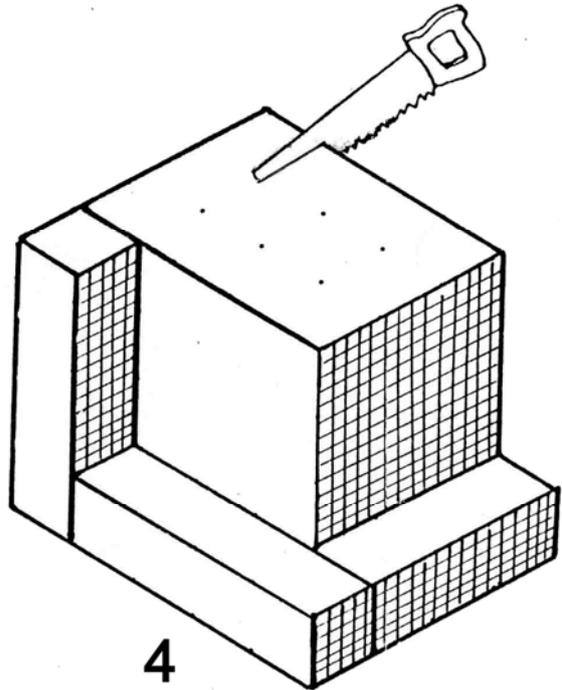
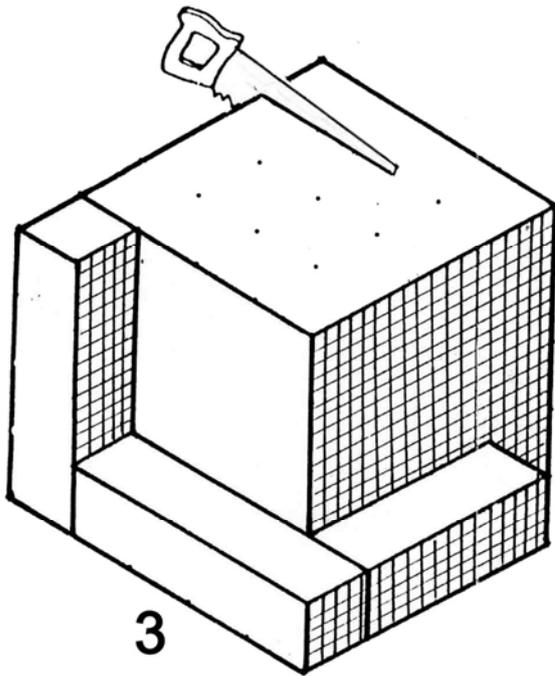


FIGURA	VOLUMEN
P	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

¿Tienen el mismo **volumen** las figuras **P** y **6**?

Luego se puede escribir:

$$(a - b)^3 =$$

El enunciado podría ser así:

El cubo de la diferencia de dos números es igual al cubo del primero menor...

20. Dadas las longitudes a y b , representa en la trama triangular cuerpos que tengan por volúmenes las siguientes expresiones:

1) $a^3 + b^3$

2) $a^3 - b^3$

3) $(a + b)^3$

4) $(a - b)^3$

